Гимназия 1543, 10-В класс, 13 декабря.

Число e.

Во всех задачах этого листка для удобства считаем $x^0 = 1$ для любого x. Целью занятия является корректное определение понятия действительной степени положительного числа. Оказывается, это можно легко сделать при помощи числа e.

1) Обозначим через $e_n(x)$ сумму вида $e_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Докажите, что $e_n(x)e_n(y) = \sum\limits_{s=0}^{n} \left(\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{x^k y^{s-k}}{k!(s-k)!} \right) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{x^{n-k} y^{n-s+k}}{(n-k)!(n-s+k)!} \right)$.

2) Докажите, что для любого x выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

3) Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{1}{(n-k)!(n-s+k)!} \leqslant \frac{2^{2n-s}}{n!}$ при $s < n$.

4) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(x)e_n(y) = \lim\limits_{n\to\infty} e_n(x+y)$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(x)$ обозначают e^x. Эта функция (от переменной x) называется экспоненциальной. Такое обозначение вполне разумно, если заметить, что $e^0 = 1$, $e^1 = e$, а $e^{x+y} = e^x e^y$. Получается, что e^x совпадает со степенью x числа e, если $x \in \mathbb{Q}$. Более того, такое определение позволяет непрерывно продолжить экспоненциальную функцию на всю действительную прямую.

5) Докажите, что e^x — строго возрастающая функция.

6) Докажите, что e^x — непрерывная функция (т.е. что $\lim e^{x_n} = e^{\lim x_n}$).

7) Докажите, что e^x взаимно однозначно отображает действительную прямую на луч положительных действительных чисел.

Обратная к e^x функция называется (натуральным) логарифмом числа x и обозначается $\ln x$. Логарифм позволяет ввести действительную степень положительного числа a. А именно, $a^x = e^{x \ln a}$.

8) Докажите следующие свойства логарифма:

а) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$.

б) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

в) $a^{\ln x / \ln a} = x$.

Отношение $\ln x / \ln a$ называется логарифмом числа x по основанию a, обозначается $\log_a x$ и показывает, в какую степень надо возвести число a, чтобы получить в результате число x.

Гимназия 1543, 10-В класс, 13 декабря.

Число e.

Во всех задачах этого листка для удобства считаем $x^0 = 1$ для любого x. Целью занятия является корректное определение понятия действительной степени положительного числа. Оказывается, это можно легко сделать при помощи числа e.

1) Обозначим через $e_n(x)$ сумму вида $e_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} = \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$.

Докажите, что $e_n(x)e_n(y) = \sum\limits_{s=0}^{n} \left(\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{x^k y^{s-k}}{k!(s-k)!} \right) + \sum\limits_{s=0}^{n-1} \left(\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{x^{n-k} y^{n-s+k}}{(n-k)!(n-s+k)!} \right)$.

2) Докажите, что для любого x выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!} = 0$.

3) Докажите, что $\sum\limits_{k=0}^{s} \frac{1}{(n-k)!(n-s+k)!} \leqslant \frac{2^{2n-s}}{n!}$ при $s < n$.

4) Докажите, что $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(x)e_n(y) = \lim\limits_{n\to\infty} e_n(x+y)$.

Предел $\lim\limits_{n\to\infty} e_n(x)$ обозначают e^x. Эта функция (от переменной x) называется экспоненциальной. Такое обозначение вполне разумно, если заметить, что $e^0 = 1$, $e^1 = e$, а $e^{x+y} = e^x e^y$. Получается, что e^x совпадает со степенью x числа e, если $x \in \mathbb{Q}$. Более того, такое определение позволяет непрерывно продолжить экспоненциальную функцию на всю действительную прямую.

5) Докажите, что e^x — строго возрастающая функция.

6) Докажите, что e^x — непрерывная функция (т.е. что $\lim e^{x_n} = e^{\lim x_n}$).

7) Докажите, что e^x взаимно однозначно отображает действительную прямую на луч положительных действительных чисел.

Обратная к e^x функция называется (натуральным) логарифмом числа x и обозначается $\ln x$. Логарифм позволяет ввести действительную степень положительного числа a. А именно, $a^x = e^{x \ln a}$.

8) Докажите следующие свойства логарифма:

а) $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$.

б) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln(a/b) = \ln a - \ln b$.

в) $a^{\ln x / \ln a} = x$.

Отношение $\ln x / \ln a$ называется логарифмом числа x по основанию a, обозначается $\log_a x$ и показывает, в какую степень надо возвести число a, чтобы получить в результате число x.