Гимназия 1543, 10-В класс, 11 сентября.

Последовательности.

Последовательность называется *ограниченной сверху* (снизу), если множество её значений является ограниченным сверху (снизу). Последовательность, ограниченная с обеих сторон, называется *ограниченной.*

1) Фразу "последовательность a ограничена сверху" можно записать при помощи символов следующим образом:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall i \; a_i < C.$$

Запишите таким же образом определение ограниченной последовательности и не ограниченной снизу последовательности.

2) Может ли ограниченная последовательность не иметь наибольшего и наименьшего элементов?

3) Является ли последовательность ограниченной?

а) $\frac{10^n}{n!}$; б) 1.01^n; в) $\frac{n^2}{2^n}$; г) $\sqrt[n]{n!}$; д) a, где $a_0 = 0$, $a_{k+1} = \sqrt{3 + a_k}$; е) a, где $a_0 = 1$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$.

4) Пусть a, b — ограниченные последовательности. Рассмотрим следующие последовательности: $s_i = a_i + b_i$, $d_i = a_i - b_i$, $p_i = a_i \cdot b_i$, $q_i = \frac{a_i}{b_i}$. Какие из них являются ограниченными? (q считается определённой при тех i, при которых $b_i \neq 0$)

Будем называть множество "кормушкой" ("ловушкой") для последовательности если оно содержит бесконечно много её членов (все её члены, начиная с некоторого номера).

5) Фразу "множество M является ловушкой для последовательности A" можно записать при помощи символов следующим образом:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall i > N \; a_i \in M.$$

Запишите аналогичным образом утверждение "множество M не является ловушкой для последовательности a".

6) Любая ли ловушка является кормушкой? Любая ли кормушка является ловушкой? Можно ли утверждать, что если отрезок $[0, 2]$ является ловушкой, то хотя бы один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ тоже является ловушкой? Можно ли утверждать, что если отрезок $[0, 2]$ является кормушкой, то хотя бы один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ тоже является кормушкой?

7) Верно ли, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок, являющийся ловушкой для неё?

8) Существует ли последовательность, для которой любой интервал является кормушкой? А последовательность, для которой любой интервал является ловушкой?

9) Докажите, что для всякой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся кормушкой для неё; а если последовательность вдобавок ещё и монотонна, то существует отрезок длины 1, являющийся ловушкой для неё.

Гимназия 1543, 10-В класс, 11 сентября.

Последовательности.

Последовательность называется *ограниченной сверху* (снизу), если множество её значений является ограниченным сверху (снизу). Последовательность, ограниченная с обеих сторон, называется *ограниченной.*

1) Фразу "последовательность a ограничена сверху" можно записать при помощи символов следующим образом:

$$\exists C \in \mathbb{R} : \forall i \; a_i < C.$$

Запишите таким же образом определение ограниченной последовательности и не ограниченной снизу последовательности.

2) Может ли ограниченная последовательность не иметь наибольшего и наименьшего элементов?

3) Является ли последовательность ограниченной?

а) $\frac{10^n}{n!}$; б) 1.01^n; в) $\frac{n^2}{2^n}$; г) $\sqrt[n]{n!}$; д) a, где $a_0 = 0$, $a_{k+1} = \sqrt{3 + a_k}$; е) a, где $a_0 = 1$, $a_{k+1} = a_k + \frac{1}{a_k}$.

4) Пусть a, b — ограниченные последовательности. Рассмотрим следующие последовательности: $s_i = a_i + b_i$, $d_i = a_i - b_i$, $p_i = a_i \cdot b_i$, $q_i = \frac{a_i}{b_i}$. Какие из них являются ограниченными? (q считается определённой при тех i, при которых $b_i \neq 0$)

Будем называть множество "кормушкой" ("ловушкой") для последовательности если оно содержит бесконечно много её членов (все её члены, начиная с некоторого номера).

5) Фразу "множество M является ловушкой для последовательности A" можно записать при помощи символов следующим образом:

$$\exists N \in \mathbb{N} : \forall i > N \; a_i \in M.$$

Запишите аналогичным образом утверждение "множество M не является ловушкой для последовательности a".

6) Любая ли ловушка является кормушкой? Любая ли кормушка является ловушкой? Можно ли утверждать, что если отрезок $[0, 2]$ является ловушкой, то хотя бы один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ тоже является ловушкой? Можно ли утверждать, что если отрезок $[0, 2]$ является кормушкой, то хотя бы один из отрезков $[0, 1]$ и $[1, 2]$ тоже является кормушкой?

7) Верно ли, что последовательность ограничена тогда и только тогда, когда существует отрезок, являющийся ловушкой для неё?

8) Существует ли последовательность, для которой любой интервал является кормушкой? А последовательность, для которой любой интервал является ловушкой?

9) Докажите, что для всякой ограниченной последовательности существует отрезок длины 1, являющийся кормушкой для неё; а если последовательность вдобавок ещё и монотонна, то существует отрезок длины 1, являющийся ловушкой для неё.