Гимназия 1543, 10-В класс, 4 сентября.

Уравнение Пелля и индийские математики.

Уравнение Пелля.

Уравнением Пелля называется уравнение в целых числах вида:

$$x^2 - dy^2 = 1,$$

где $d \in \mathbb{N}$ не является точным квадратом. Для удобства будем рассматривать только положительные решения (решения с отрицательными значениями переменных получаются из неотрицательных тривиальным образом, решение $(1,0)$ для нас будет неинтересно). Среди положительных решений особняком стоит т.н. *минимальное* — решение с наименьшим x (и y, кстати, тоже). Все остальные решения можно получить из минимального при помощи нехитрого преобразования.

Впервые уравнение Пелля появилось в сочинениях индийского математика Брахмагупты, где он дал наброски общего метода решения. В дальнейшем метод Брахмагупты получил развитие, а к 12 веку появились труды, в которых был дан алгоритм, позволяющий решить любое уравнение Пелля. Результаты индийских математиков и будут изложены в этой лекции.

Тождество Брахмагупты.

Для произвольных чисел x_1, x_2, y_1, y_2 и d выполнено тождество:

$$(x_1^2 - dy_1^2)(x_2^2 - dy_2^2) = (x_1x_2 + dy_1y_2)^2 - d(x_1y_2 + x_2y_1)^2.$$

Из этого тождества следует, что если (x_1, y_1) и (x_2, y_2) — решения уравнения Пелля, то и $(x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1)$ — решение (назовём его "произведением" решений (x_1, y_1) и (x_2, y_2); для такого "умножения" выполняются переместительный и сочетательный законы). Таким образом, "степени" минимального решения являются решениями. Более того, оказывается, ими исчерпываются все решения уравнения Пелля.

Действительно, пусть $s = (x_0, y_0)$ — некое (положительное) решение уравнения Пелля, а $s_1 = (x_1, y_1)$ — минимальное. Обозначим через s_1^{-1} решение $(x_1, -y_1)$. Рассмотрим решение $s' = ss_1^{-1}$. Возведём вторую компоненту этого решения в квадрат:

$$(x_1y_0 - x_0y_1)^2 = x_1^2y_0^2 + x_0^2y_1^2 - 2x_0y_0x_1y_1 = (1 + dy_1^2)y_0^2 + (1 + dy_0^2)y_1^2 - 2x_0y_0x_1y_1 = y_0^2 + y_1^2 - 2y_0y_1(x_0x_1 - dy_0y_1).$$

Докажем, что $x_0x_1 > dy_0y_1$. Если бы это было неверно, то было бы выполнено $x_0x_1 - dy_0y_1 \leqslant 0$, а также:

$$x_0^2x_1 - dx_0y_0y_1 \leqslant 0$$
$$x_1^2x_0 - dx_1y_0y_1 \leqslant 0.$$

Последние два неравенства легко переписываются в виде: $x_1 + dy_0(y_0x_1 - y_1x_0) \leqslant 0$ и $x_0 + dy_1(y_1x_0 - y_0x_1) \leqslant 0$. В силу положительности x_0 и x_1 оба неравенства одновременно не могут иметь место.

Поэтому $(x_1y_0 - x_0y_1)^2 < y_0^2 + y_1^2 - 2y_0y_1 = (y_0 - y_1)^2$, что меньше y_0^2. Значит, решение $(|x_1x_0 - dy_1y_0|, |x_1y_0 - x_0y_1|)$ имеет меньшую вторую (а, следовательно, и первую) компоненту, чем решение s. Таким образом, умножая это решение на s_1^{-1}, беря модуль обеих компонет и повторяя эти действия, получим в итоге решение с нулевым y. А такое решение одно: $(1,0)$.

Осталось заметить, что операция, обратная к умножению на s_1^{-1} — это умножение на s_1, а замена знаков каких-то компонент, выполненная перед умножением на s_1 эквивалентна умножению на s_1 или s_1^{-1}, иногда с последующей заменой знаков.

Таким образом, решение (x_0, y_0) получено из решения $(1,0)$ путём умножения на какую-то степень s_1, возможно, с последующей заменой знаков. Учитывая, что отрицательные степени s_1 имеют те же модули компонент, что и соответствующие положительные степени (докажите самостоятельно!), получаем, что все нетривиальные положительные решения уравнения Пелля исчерпываются положительными степенями минимального решения.

Чакравала.

Сама задача поиска минимального решения зачастую представляет большую трудность. Она была решена между 7 и 11 веками, решение было изложено в трудах индийского математика Бхаскары II в 12 веке под названием чакравала (колесо). А вот первое полное доказательство того, что метод работает, появилось только в 30х годах 20 века. Само доказательство несколько громоздко, поэтому изложено не будет, в отличие от метода.

Тождество Брахмагупты позволяет перемножать не только решения уравнения Пелля, но и решения более общего уравнения:

$$x^2 - dy^2 = z.$$

Произведением решений (x_1, y_1, z_1) и (x_2, y_2, z_2) назовём тройку (тоже решение) $(x_1x_2 + dy_1y_2, x_1y_2 + x_2y_1, z_1z_2)$.

Метод чакравала решения уравнения Пелля состоит в следующем: берётся произвольное решение (x, y, z) с взаимно простыми x и y (обычно $(1, 0, 1)$) и умножается на решение $(t, 1, t^2 - d)$, причём $t > 0$ подбирается так, чтобы $x + yt$ делилось на z (докажите, что так сделать можно), а $|t^2 - d|$ был минимально возможным. Новая тройка $(xt + yd, x + yt, z(t^2 - d))$ превращает уравнение в верное равенство:

$$(xt + yd)^2 - d(x + yt)^2 = z(t^2 - d).$$

Деля равенство на z^2, получаем, что решением уравнения также является тройка $\left(\dfrac{xt + yd}{|z|}, \dfrac{x + yt}{|z|}, \dfrac{t^2 - d}{z}\right)$.

Так как $x(x + yt) - y(xt + yd) = z$, а z и y взаимно простые, то $xt + yd$ делится на z (более того, z есть НОД $x + yt$ и $xt + yd$). Из равенства $(xt + yd)^2 - d(x + yt)^2 = z(t^2 - d)$ следует, что и $t^2 - d$ делится на z. Поэтому новая тройка состоит из целых чисел, более того, попарно взаимно простых.

Теперь эта тройка берётся в качестве исходной (x, y, z), и шаг алгоритма повторяется. В некоторый момент в качестве z окажется число 1 (это утверждение останется без доказательства).