Векторы в пространстве

Определение. *Класс эквивалентности направленных отрезков называется **вектором**.*

Определение. ***Суммой** двух **векторов** называется вектор, полученный по правилу треугольника:* $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}$.
Векторы также складывают по правилам многоугольника, параллелограмма и параллелепипеда.

Свойства сложения векторов:

1. $\vec{a}+\vec{b}=\vec{b}+\vec{a}$ *(коммутативность)*
2. $(\vec{a}+\vec{b})+\vec{c}=\vec{a}+(\vec{b}+\vec{c})$ *(ассоциативность)*
3. $\vec{a}+\vec{0}=\vec{a}$ *(закон поглощения нулевого вектора)*
4. $\forall\vec{a}\ \exists(-\vec{a}):\ \vec{a}+(-\vec{a})=\vec{0}$ *(существование противоположного вектора)*

Определение. ***Произведением числа** k **и ненулевого вектора** $\vec{a}$ называется вектор $k\vec{a}$, длина которого равна* $|k|\cdot|\vec{a}|$*, причем* $k\vec{a}\uparrow\uparrow\vec{a}$ *при* $k>0$ *и* $k\vec{a}\uparrow\downarrow\vec{a}$ *при* $k<0$. $k\vec{a}=\vec{0}$ *при* $k=0$ *или* $\vec{a}=\vec{0}$.

Свойства умножения вектора на число.

1. $k(l\vec{a})=(kl)\vec{a}$ *(однородность)*
2. $(k+l)\vec{a}=k\vec{a}+l\vec{a}$ *(дистрибутивность относительно чисел)*
3. $k\left(\vec{a}+\vec{b}\right)=k\vec{a}+k\vec{b}$ *(дистрибутивность относительно векторов)*

Определение. *Векторы называются **коллинеарными**, если изображающие их направленные отрезки параллельны некоторой прямой.*

Замечания. 1) Нулевой вектор считается параллельным любой прямой, поэтому он коллинеарен любому вектору. 2) Определение корректно в силу транзитивности параллельности прямых в пространстве.

Теорема. *Вектор $\vec{a}$ коллинеарен ненулевому вектору $\vec{b}$ тогда и только тогда, когда найдется такое число k, что* $\vec{a}=k\vec{b}$.

Задачи

76. Точка М – середина отрезка АВ. Докажите, что для любой точки пространства О верно равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right)$.
77. Пусть точка Х делит отрезок АВ в отношении АХ : ХВ = $m:n$. Докажите, что для любой точки пространства О выполняется равенство $\overrightarrow{OX}=\frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
78. Пусть М – точка пересечения медиан треугольника АВС. Докажите, что для любой точки пространства О выполняется равенство $\overrightarrow{OM}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC})$
79. Дан тетраэдр ABCD. Найдите все точки М, для которых выполняется равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}=\vec{0}$.
80. а) Отрезок, соединяющий точку пересечения медиан грани тетраэдра с противоположной вершиной, называется ***медианой*** тетраэдра. Докажите с помощью векторов, что все четыре медианы тетраэдра пересекаются в одной точке, и найдите, в каком отношении они делятся этой точкой.
б) Докажите, что в этой же точке пересекаются и отрезки, соединяющие середины скрещивающихся ребер тетраэдра (эти отрезки называются ***бимедианами*** тетраэдра).
81. Обобщите утверждение задачи 78 для точки пересечения медиан тетраэдра.
82. В параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ построили сечение A_1BD. Докажите с помощью векторов, что диагональ AC_1 проходит через точку пересечения его медиан и делится этой точкой в отношении 1 : 2.
83. Треугольник АВС является параллельной проекцией треугольника $A_1B_1C_1$ на плоскость. Известно, что $AA_1=a$, $BB_1=b$, $CC_1=c$. Найдите расстояние между точками пересечения медиан этих треугольников.

Домашнее задание

84. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Найдите все точки М, для которых выполняется равенство $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{MD}+\overrightarrow{MA_1}+\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{MC_1}+\overrightarrow{MD_1}=\vec{0}$.
85. Пусть S_1 и S_2– точки пересечения медиан тетраэдров $A_1B_1C_1D_1$ и $A_2B_2C_2D_2$. Докажите, что выполняется равенство $\overrightarrow{S_1S_2}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{A_1A_2}+\overrightarrow{B_1B_2}+\overrightarrow{C_1C_2}+\overrightarrow{D_1D_2}\right)$.
86. В треугольной призме проведено сечение, пересекающее все ее боковые ребра. Докажите, что центры масс сечения и оснований призмы лежат на одной прямой.
87.

Компланарность векторов

Определение 1. *Три вектора называются **компланарными**, если изображающие их направленные отрезки параллельны некоторой плоскости.*

Замечание. Три вектора, один из которых нулевой, компланарны.

Определение 2. *Три вектора называются **компланарными**, если, будучи отложенными от одной точки, они расположены в одной плоскости.*

Признак компланарности векторов. *Если для векторов $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ существуют такие числа x и y, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$, то векторы $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарны.*

Верно ли обратное утверждение?

Теорема. *Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - компланарные векторы, причем $\vec{a}$ и $\vec{b}$ неколлинеарны. Тогда существует единственная пара чисел x и y такая, что $\vec{c} = x\vec{a} + y\vec{b}$.*

Теорема о разложении по базису. *Пусть $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ - некомпланарные векторы. Тогда для любого вектора $\vec{d}$ существует единственная тройка чисел x, y, z такая, что $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$.*

Задачи

88. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$. Точка O – центр грани ABB_1A_1, точки N и K делят ребра AD и D_1C_1 в отношениях AN : ND = 3: 5, $D_1K : KC_1 = 1 : 3$. Точка M делит отрезок NK в отношении NM : MK = 1 : 2. Разложите вектор $\overrightarrow{MO}$ по базису $\overrightarrow{AA_1}$, $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$.

89. M – середина ребра AD тетраэдра ABCD, точка K делит ребро CD в отношении AK : KC = 2 : 3. Через точку пересечения медиан треугольника ABC проведена плоскость, параллельная плоскости BMK. В каком отношении делит она ребро CD?

90. На диагоналях AB_1 и CA_1 боковых граней треугольной призмы $ABCA_1B_1C_1$ расположены точки E и F так, что $EF \parallel BC_1$. Найдите отношение длин отрезков EF и BC_1.

91. На ребрах SA и SB тетраэдра SABC выбраны соответственно точки A_1 и B_1, причем известно, что $SB_1 : SB = m$. Точки M и N лежат на отрезках A_1B и CB_1 соответственно, причем $CN : CB_1 = p$, а отрезок MN параллелен плоскости ASC. Найдите отношение $BM : BA_1$.

Теорема. *Пусть точки O, A, B, C не лежат в одной плоскости. Точка X лежит в плоскости ABC тогда и только тогда, когда $\overrightarrow{OX} = p\overrightarrow{OA} + q\overrightarrow{OB} + r\overrightarrow{OC}$, где $p + q + r = 1$.*

92. Что можно сказать о расположении точки X, если $p + q + r < 1$? Если $p + q + r > 1$? Как зависит расположение точки X от знаков коэффициентов разложения?

93. Докажите, что если точка X принадлежит треугольнику ABC, то $p:q:r = S_{BXC} : S_{CXA} : S_{AXB}$.

94. Векторы $\overrightarrow{MA}$, $\overrightarrow{MB}$ и $\overrightarrow{MC}$ некомпланарны. Определите, в каком отношении плоскость ABC делит отрезок MK, если известно, что $\overrightarrow{MK} = 1,3\overrightarrow{MA} - \overrightarrow{MB} + 0,9\overrightarrow{MC}$.

95. На ребрах DA, DB и DC треугольной пирамиды ABCD взяты точки M, N, K так, что $DM = \frac{1}{3}DA$, $DN = \frac{1}{4}DB$, $DK = \frac{3}{5}DC$. Пусть G – точка пересечения медиан треугольника ABC. В каком отношении плоскость MNK делит отрезок DG?

96. Основанием четырехугольной пирамиды SABCD является параллелограмм ABCD. На ребрах SA, SB и SC отмечены такие точки A_1, B_1 и C_1, что $SA_1 = A_1A$, $SB_1 : B_1B = 2 : 1$, $SC_1 : C_1C = 3 : 2$. Определите, в каком отношении плоскость $A_1B_1C_1$ делит ребро SD.

Теорема. *Плоскость отсекает от боковых ребер SA, SB, SC и SD правильной четырехугольной пирамиды SABCD отрезки длиной a, b, c, d соответственно. Докажите, что $\frac{1}{a} + \frac{1}{c} = \frac{1}{b} + \frac{1}{d}$.*

97. Точка M – середина ребра A_1D_1 параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$, O – точка пересечения диагоналей грани CC_1D_1D. Определите, в каком отношении отрезок A_1O делится плоскостью, содержащей точки B и M и параллельной прямой AC.

98. На ребрах AD, DB и AC треугольной пирамиды ABCD взяты точки X, Y и Z так, что AX : XD = DY : YB = 2 : 1, AZ : ZC = 3 : 1. Точки M и N – середины ребер соответственно AB и CD. В каком отношении отрезок MN делится плоскостью XYZ?

Домашнее задание

99. а) Дан тетраэдр ABCD, M и N – середины ребер BC и AD. Всегда ли найдется плоскость, которой параллельны прямые AB, CD и MN?
б) Дан пространственный четырехугольник ABCD, точки M и N принадлежат отрезкам соответственно BC и AD. Известно, что прямые AB, CD и MN параллельны некоторой плоскости. Найдите AN : ND, если BM : MC = λ.

100. Два правильных пятиугольника, $OABCD$ и $OA_1B_1C_1D_1$, не лежат в одной плоскости. Докажите, что прямые AA_1, BB_1, CC_1 и DD_1 параллельны одной плоскости.

101. На продолжении ребра BC параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечена такая точка E, что CE = 0,5 BC. На отрезках DB_1 и D_1E взяты точки M и N так, что отрезки MN и AC_1 параллельны. Найдите отношение длин этих отрезков.

102. Основанием четырехугольной призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ является трапеция ABCD, AD ǁ BC, AD = 2 BC. Через точку O пересечения диагоналей верхнего основания $A_1B_1C_1D_1$ провели прямую, параллельную плоскости грани ABB_1A_1 и пересекающую прямую DC_1 в точке M. а) Найдите отношение C_1M : MD;
б) Через точку A проведена прямая, параллельная OM. Докажите, что она пересекает отрезок BB_1 и определите, в каком отношении она его делит.

103. На ребрах AB, AC и AD тетраэдра ABCD взяты точки K, L и M так, что $AB = \alpha AK$, $AC = \beta AL$, $AD = \gamma AM$.
а) Рассмотрим всевозможные плоскости KLM, удовлетворяющие условию $\gamma = \alpha + \beta + 1$. Докажите, что все они проходят через фиксированную точку.
б) Рассмотрим всевозможные плоскости KLM, удовлетворяющие условиям $\beta = \alpha + 1$ и $\gamma = \alpha + 2$. Докажите, что все они проходят через фиксированную прямую.

104. На ребрах BB_1 и CD параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ отмечены такие точки M и K, что $BM : MB_1 = DK : KC = 1 : 2$. Определите, в каком отношении отрезок MK делится плоскостью, проходящей через середины отрезков AD, DC и B_1D.

105. На ребрах AD и DC тетраэдра ABCD отмечены такие точки M и K, что AM : MD = 2 : 3, DK : KC = 1 : 3. Постройте сечение, содержащее точки M и K и параллельное прямой DB. Определите, в каком отношении это сечение делит отрезок, соединяющий центры масс граней ADB и ABC.

106. На основании ABC треугольной пирамиды OABC взята точка M. Докажите, что $OM \cdot S_{ABC} \le OA \cdot S_{MBC} + OB \cdot S_{MBC} + OC \cdot S_{MBC}$.