Вычисление расстояний

Расстояние от точки до прямой и до плоскости

Определение. *Если среди всех расстояний между точками, одна из которых принадлежит фигуре F_1, а другая – фигуре F_2, существует наименьшее, то оно называется* ***расстоянием между фигурами*** *F_1 и F_2.*

125. Приведите примеры фигур, расстояние между которыми не определено.

126. Докажите, что расстояние от точки до прямой (плоскости) равно длине перпендикуляра, опущенного из этой точки на эту прямую (плоскость).

127. Высота SO правильной пирамиды SABCD равна $2a$, AB = a, K – середина отрезка AO. Найдите расстояния до прямой SK а) от точки C; б) от точки E, симметричной точке A относительно D.

128. ABCD – правильный тетраэдр с ребром a. Точки M и N – середины ребер соответственно BD и AC. Найдите расстояние до прямой MN от точек: а) B; б) K – середины ребра AB; в) O – точки пересечения медиан основания ABC;. г) E – середины отрезка DO.

129. Расстояние от точки M до вершины прямого угла равно 12, а длины перпендикуляров, опущенных из M на стороны этого угла, равны 8 и 9. Найдите расстояние от M до плоскости данного прямого угла.

Свойства расстояния от точки до плоскости

1. Точки прямой, параллельной плоскости, удалены от этой плоскости на одинаковое расстояние. Оно равно расстоянию от этой прямой до плоскости.
2. Точки плоскости α, параллельной плоскости β, удалены от плоскости β на одинаковое расстояние. Оно равно расстоянию между плоскостями α и β.
3. Пусть точки A и B принадлежат наклонной, пересекающей плоскость α в точке C. Тогда расстояния от точек A и B до плоскости пропорциональны длинам отрезков AC и BC.

130. Токи A и B удалены от плоскости α на расстояния соответственно a и b. Точка C делит отрезок AB в отношении AC : BC = $m : n$. Найдите расстояние от точки C до плоскости α.

131. В прямоугольном параллелепипеде $ABCDA_1B_1C_1D_1$ известны длины ребер : AB = $3a$, AD = $4a$, :$AA_1 = a$. Найдите расстояние до плоскости AB_1D_1 от следующих точек: а) A_1; б) D; в) точки E, симметричной точке B относительно D; г) C.

132. На ребрах AC и MC правильного тетраэдра MABC с ребром a взяты соответственно точки E и C_1 – середины этих ребер. Найдите расстояние до плоскости BC_1E от следующих точек: а) M; б) D – середины ребра AM; в) B_1 – середины ребра MB; г) C.

133. Боковое ребро правильной пирамиды SABC равно медиане ее основания. Точки P и Q – середины соответственно ребер AB и AC. Считая AB = a, найдите расстояние до плоскости α, проходящей через точки P и q параллельно прямой SA, от следующих точек: а) центра основания O; б) B; в) середины M высоты SO.

134. Найдите расстояние от вершины A_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра a до следующих плоскостей: а) AB_1D; б) DBP, где точка P – середина ребра B_1C_1; в) BC_1D.

Расстояние между скрещивающимися прямыми

Определение. ***Общим перпендикуляром*** *двух скрещивающихся прямых называется перпендикулярный им отрезок, концы которого лежат на данных прямых.*

Теорема. *Общий перпендикуляр двух скрещивающихся прямых существует и единственен.*

Теорема. *Расстояние между двумя скрещивающимися прямыми равно длине их общего перпендикуляра.*

Полезные советы

Чтобы найти расстояние между скрещивающимися прямыми, можно:

1) Построить их общий перпендикуляр и найти его длину;

2) Провести через одну из них плоскость, параллельную другой, и найти расстояние от любой точки второй прямой, до этой плоскости.

3) Провести через них параллельные плоскости и найти расстояние между ними

4) Провести через одну из них плоскость, перпендикулярную другой, и найти в этой плоскости расстояние от точки ее пересечения со второй прямой до первой прямой.

135. На ребрах AD, AB, CC_1, A_1D_1 и A_1B_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ взяты соответственно точки Q, P, C_2, R и V – середины этих ребер. Считая ребро куба равным a, найдите расстояния между прямой A_1C_1 и следующими прямыми: а) CQ; б) DC_2; в) DR; г) DV; д) QT, где точка T – середина отрезка A_1B.

136. Боковые грани призмы $BACA_1B_1C_1$ – квадраты. Считая AB = a, найдите расстояния между прямой AB_1 и следующими прямыми: а) CC_1; б) CD, где D – середина ребра AB; в) BC; г) прямой, проходящей через середины ребер AC и CC_1; д) BC_1.

137. В основании пирамиды MABC лежит треугольник с прямым углом при вершине C. Ее боковое ребро MC перпендикулярно плоскости основания, а отношение ребер AC:BC:MC = = $1 : 1 : \sqrt{2}$. На ребрах MA, MC, AC и AB взяты соответственно точки A_1, C_1, D и E – середины этих ребер.

1) Считая BC = a, найдите расстояния между прямой MB и следующими прямыми: а) DE; б) A_1D; в) AC; г) A_1C_1; д) C_1D; е) C_1E.

2) Найдите углы между прямой MB и прямыми а) DE; б) C_1D; в) C_1E.

138. В правильной четырехугольной пирамиде SABCD боковая грань – равносторонний треугольник со стороной 2. Точка Q – центр грани CSD. Найдите угол и расстояние между прямыми BC и AQ

139. Найдите расстояние между диагональю DB_1 куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с длиной ребра a и прямой D_1C.

140. В основании пирамиды SABCD лежит равносторонний треугольник ABC, длина стороны которого равна $4\sqrt{2}$. Боковое ребро SC перпендикулярно плоскости основания и имеет длину 2. Найдите величину угла и расстояние между скрещивающимися прямыми, одна из которых проходит через точку S и середину ребра BC, а другая – через точку C и середину ребра AB.