Обратная функция

Определение. Пусть функция $y = f(x)$ определена на некотором множестве $X \subset \mathbb{R}$. Тогда $f : X \to f(X)$. Функция $\varphi : f(X) \to X$ такая, что $(\forall x \in X)(\varphi(f(x)) = x)$ и $(\forall y \in f(X))(f(\varphi(y)) = y)$ называется ***обратной*** к функции $y = f(x)$ на множестве X и обозначается f^{-1}. Функция $y = f(x)$, имеющая обратную, называется ***обратимой***.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***взаимно однозначной*** на множестве $X \subset \mathbb{R}$, если любой элемент множества $f(X)$ имеет только один прообраз в X. (т.е. если $x_1 \in X$, $x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$, то $f(x_1) \neq f(x_2)$).

98. Докажите, что функция, определенная на некотором множестве, обратима на нем тогда и только тогда, когда она взаимно однозначна на этом множестве.

99. Найдите функции, обратные данным: а) $f(x) = 2x - 5$; б) $x^2 - 4x + 5$, $x \geqslant 2$; в) $x^2 - 4x + 5$, $x \leqslant 2$; г) $f(x) = x^4 + 2x^2$.

100. Докажите, что графики взаимно обратных функций симметричны друг другу относительно прямой $y = x$.

Теорема 1*. Функция, строго монотонная на некотором множестве, обратима на нем. Обратная функция тоже строго монотонна.*

101. Может ли немонотонная функция быть обратимой?

Теорема 2*. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на отрезке $[a; b]$. Пусть M и m — ее наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке (ввиду монотонности эти значения принимаются на концах отрезка). Тогда на отрезке $[m; M]$ существует функция, обратная к функции f. Эта функция тоже возрастает (убывает) и непрерывна.*

102. Пусть непрерывная на отрезке $[a; b]$ функция обратима. Обязательно ли она монотонна?

103. Докажите, что на луче $[0; \infty)$ существует функция, обратная функции $y = x^n$, где $n \in \mathbb{N}$, причем эта функция непрерывна и монотонно возрастает. Как она называется?

104. Укажите область определения и область значения функций $y = \arcsin x$; $y = \arccos x$; $y = \operatorname{arctg} x$; $y = \operatorname{arcctg} x$. Постройте их графики.

105. Постройте в одной системе координат графики функций: а) $y = e^x$ и $y = \ln x$; б) $y = 2^x$ и $y = \log_2 x$; в) $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ и $y = \log_{\frac{1}{2}} x$. Опишите свойства этих функций (область определения, область значений, нули, интервалы знакопостоянства, характер монотонности)

Второй замечательный предел и его следствия

Второй замечательный предел. $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$

Следствия. 1. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x} = 1$; 2. $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x - 1}{x} = 1$.

Теорема об одновременном переходе к пределу для последовательностей.
Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = B$, причем $(\forall n \in \mathbb{N})(a_n > 0)$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} a_n^{b_n} = A^B$.

Теорема об одновременном переходе к пределу для функций.
Пусть $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, причем $f(x) > 0$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} f(x)^g(x) = A^B$.

106. Как изменятся теоремы об одновременном переходе к пределу, если A и/или B заменить на ∞?

107. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+5}{2x+1}\right)^{x+1}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 4x)}{5x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{ax} - e^{bx}}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}(\operatorname{tg} x)^{\operatorname{tg} 2x}$;

д) $\lim\limits_{x\to 0}(1-2x)^{\frac{1}{x}}$; е) $\lim\limits_{x\to a}\frac{\ln x - \ln a}{x - a}$; ж) $\lim\limits_{x\to b}\frac{a^x - a^b}{x - b}$; з) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln\cos ax}{\ln\cos bx}$;

Домашнее задание

108. Вычислите пределы:

а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+1}{x^2-2}\right)^{2x^2}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2x-1}{2x^2-3x-2}\right)^{\frac{2x-1}{x+1}}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+\sin 3x)}{\ln(1+\operatorname{tg} 4x)}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(3x+2)^{\frac{1}{x-1}}$;
д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^{2x}-1}{4x-2}$;