Глобальные свойства непрерывных функций

Теорема о промежуточном значении

73. Докажите, что если функция непрерывна в некоторой точке, то в достаточно малой окрестности этой точки она ограничена.

74. Докажите, что если функция непрерывна в некоторой точке, и ее значение в этой точке отлично от нуля, то в достаточно малой окрестности этой точки функция сохраняет знак.

Теорема о корне. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и имеет на его концах разные знаки. Тогда $(\exists\xi \in [a;\ b])(f(\xi) = 0)$.

Таким образом, *если на интервале функция непрерывна и не обращается в нуль, то она сохраняет на нем постоянный знак.* На этом основан метод интервалов (обобщенный, а не только для рациональных функций)

75. Решите неравенство: а) $\frac{x^2-1}{\sqrt{13-x^2}} \geqslant x - 1$; б) $\frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{x+10} \leqslant \frac{\sqrt{8-2x-x^2}}{2x+9}$.

Теорема о корне "узаконивает"графические соображения, применяемые при исследовании квадратного трехчлена и подобных задачах.

76. Докажите, что квадратный трехчлен ax^2+bx+c, для которого $a+b+c > 0$, а $a-b+c > 0$, имеет два действительных корня.

77. При каких значениях параметра a число 3 заключено между корнями уравнения $x^2 - (2a+1)x + 4 - a = 0$?

Теорема о корне позволяет также со сколь угодно высокой точностью приближенно находить корни уравнения. Для этого надо каким угодно образом отыскать отрезок, на концах которого функция в левой части уравнение принимает значения разных знаков, а затем делить отрезок пополам нужное число раз. Иногда математики называют это вслед за артиллеристами "методом вилки".

78. а) Докажите, что уравнение $x^3 - 5x + 2$ имеет три действительных корня. б) Докажите, что неравенство $x^3 - 5x + 2 > 0$ выполняется при всех $x > 2$

Теорема Больцано-Коши о промежуточном значении. Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на отрезке $[a;\ b]$ и принимает на концах отрезка разные значения A и B. Тогда $(\forall \mathrm{C} \in [A;\ B]([B;\ A]))(\exists\xi \in [a;\ b])(f(\xi) = C)$.

79. Верно ли обратное: если $(\forall \mathrm{C} \in [f(a);\ f(b)]([f(b;\ f(a)]))(\exists\xi \in [a;\ b])(f(\xi) = C)$, то функция непрерывна на отрезке $[a;\ b]$?

80. Верно ли предыдущее утверждение для монотонной функции?

81. Докажите, что территорию Кремля можно разделить на две равновеликие части, проведя прямую: а) строго по меридиану; б) через вход в "Польскую моду".

82. Монах с 8 часов утра до 8 часов вечера поднимался на священную гору. Ночь он провел в молитвах, а на следующий день спускался с горы с 8 утра до 8 вечера по той же дороге. Скорость его оба раза вовсе не была постоянной, иногда он отдыхал, мог и возвращаться за забытой на предыдущем привале вещью. Докажите, что в каком-то месте дороге он в первый и во второй день был ровно в одно и то же время.

Домашнее задание

83. Решите неравенство: а) $(x+3)\sqrt{12-|x|} \geqslant 0$; б) $\frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x} < 3$; в) $\frac{1}{\sqrt{6-3x}+x} \geqslant \frac{1}{2}$; г) $(x+3)^2 \geqslant (x+3)(1+\sqrt{2x^2-4x-5})$.

84. Докажите, что многочлен нечетной степени всегда имеет хотя бы один действительный корень.

85. Определите знак c, если $a+b+c < 0$ и уравнение $ax^2+bx+c = 0$ не имеет корней.

86. Найдите все значения a, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x_2 - 2(a-1)x + 2a + 1 = 0$ удовлетворяют условию $-4 < x_1 < 0 < x_2 < 4$.

87. Найдите методом вилки с точностью до $0{,}2$ ближайший к нулю корень уравнения $x^2 + 4x + 3 = 0$.

88. Докажите, что существует прямая линия, одновременно делящая на две равновеликие части и территорию Кремля, и дачу Евгения Иваныча.

89. Докажите, что территорию Кремля можно разбить на 4 равновеликие части двумя взаимно перпендикулярными прямыми.

90. Поезд движется прямолинейно из А в В, его скорость непостоянна, но меняется по заранее известному закону. К полу на шарнире прикреплен стержень, который может наклоняться вперед и назад вплоть до касания с полом. Докажите, что существует такое начальное положение стержня, при котором он так и не прикоснется к полу.

Чем отрезок отличается от интервала

Теорема Вейерштрасса об ограниченности функции, непрерывной на отрезке. Функция, непрерывная на отрезке, ограничена.

91. Всякая ли функция, непрерывная на интервале, ограничена? Какое место в доказательстве теоремы неверно для интервала?

92. Пусть функция непрерывна на интервале и ограничена на нем. Как и всякое ограниченное множество, область ее значений имеет точную нижнюю и верхнюю грани. Обязательно ли функция их достигает?

Теорема Вейерштрасса об экстремальных значениях.
Функция, непрерывная на отрезке, достигает на нем своих точных нижней и верхней граней, т.е. $(\exists \xi \in [a;\, b])(f(\xi) = inf\, f([a;\, b]))$ и $(\exists \eta \in [a;\, b])(f(\eta) = sup\, f([a;\, b]))$.

93. Приведите пример ограниченной функции, не достигающей своих точных верхней и нижней граней: а) заданной на $[0;\, 1]$; б) непрерывной на $\mathbb{R}$.

Определение. Функция $y = f(x)$ называется ***равномерно непрерывной*** на множестве M, если $(\forall \varepsilon > 0)(\exists \delta = \delta(\varepsilon))((|x_1 - x_2| < \delta) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon))$.

94. Напишите определение функции, непрерывной на множестве M. Найдите отличие.

95. Сформулируйте определение функции, не являющейся равномерно непрерывной на множестве M.

96. а) Докажите, что функция $y = \frac{1}{x}$ на интервале $(0;\, 1)$ непрерывной является, а равномерно непрерывной — нет.
б) Приведите пример функции, являющейся непрерывной, но не являющейся равномерно непрерывной на R; на луче $[0;\, +\infty)$.

97. Является ли равномерно непрерывной на множестве неотрицательных чисел функция $y = \sqrt{x}$?

Теорема Кантора. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на этом отрезке.

Заметим, что доказательства и теоремы Кантора, и первой теоремы Вейерштрасса (а из нее вытекает и вторая) опираются на возможность выделить в последовательности точек отрезка сходящуюся подпоследовательность (т.е. на *ограниченность* отрезка), а также на сходимость этой последовательности к точке отрезка (т.е. на его *замкнутость*) Как видно из этих примеров, сочетание этих двух свойств продуктивно.

Определение. Замкнутое ограниченное множество называется ***компактом***.