Предел и непрерывность функции - 2 (добавление)

49. Докажите, что *если функция* $f(x)$ *не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) на луче* $(a;\ +\infty)$, *то существует* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

50. Верно ли, что если функция $f(x)$ не убывает (не возрастает) и ограничена сверху (снизу) на интервале $(a;\ b)$, то она имеет предел в каждой точке этого интервала?

51. Пусть функция $f(x)$ не убывает и ограничена сверху на интервале $(a;\ b)$. Тогда существует $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)$.

52. Сформулируйте аналогичную теорему для невозрастающей функции.

53. Докажите, что *функция, монотонная на интервале* $(a;\ b)$, *имеет в каждой точке этого интервала предел как слева, так и справа.*

Предел и непрерывность функции - 4

Связь предела функции с пределом последовательности

54. Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим множество сходящихся к $a = 3$ последовательностей (x_n), члены которых принадлежат области определения $f(x)$. Верно ли, что все соответствующие им последовательности $f(x_n)$ сходятся? а) $f(x) = \sqrt{x^2-5}$; б) $f(x) = [x]$; в) $f(x) = \dfrac{x^2-6x+9}{x^2-2x-3}$; г) $f(x) = \dfrac{x^2-2x-3}{x^2-6x+9}$.

55. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, то для любой сходящейся к a последовательности (x_n), члены которой принадлежат области определения $f(x)$ и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b.

56. Сформулируйте и докажите обратное утверждение.

    Две последние задачи доказывают корректность *второго определения предела функции в точке*, предложенного немецким математиком *Генрихом Гейне*:

    Определение предела функции по Гейне. Говорят, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$, если для любой сходящейся к a последовательности (x_n), члены которой принадлежат области определения $f(x)$ и отличны от a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b.

57. Дайте определение непрерывной функции по Гейне.

58. Пусть дана функция $f(x)$. Рассмотрим множество сходящихся к a последовательностей (x_n), члены которых принадлежат области определения $f(x)$. Докажите, что если все соответствующие им последовательности $f(x_n)$ сходятся, то они сходятся к одному и тому же пределу.

    Определение предела по Гейне удобно для доказательства некоторых свойств пределов.

59. Докажите, пользуясь определением по Гейне, арифметические свойства пределов.

    Критерий Коши. Предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда
    $(\forall\varepsilon > 0)(\exists\delta)((0 < |x_1 - a| < \delta, 0 < |x_2 - a| < \delta,) \Rightarrow (|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon))$

    Теорема о предельном переходе. Если существуют пределы $\lim\limits_{x\to a} f(x) = A$ и $\lim\limits_{x\to a} g(x) = B$, и существует проколотая окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $f(x) \leqslant g(x)$, то $A \leqslant B$.

    Теорема "о двух милиционерах". Если существует проколотая окрестность точки a, в которой выполнено неравенство $\varphi(x) \leqslant f(x) \leqslant \psi(x)$, и $\lim\limits_{x\to a}\varphi(x) = \lim\limits_{x\to a}\psi(x) = b$, то $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует и равен b.

Непрерывность тригонометрических функций. Первый замечательный предел

60. Докажите, что $\sin x < x < \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$.
Указание. Отметим на координатном круге точки P_0 и P_x. Проведем перпендикуляр к оси абсцисс P_xB и касательную P_xA до пересечения с осью абсцисс. Сравним длину дуги P_0P_x с длинами отрезков P_xB и P_xB.

61. Докажите, что $|\sin x| \leqslant |x|$ для всех действительных x, причем равенство достигается только в нуле.

62. Докажите, что непрерывна на всей числовой оси функция: а) $y = \sin x$; б) $y = \cos x$.

63. Исследуйте на непрерывность функции: а) $y = \operatorname{tg} x$; б) $y = \operatorname{ctg} x$; в) $y = \sin\frac{1}{x}$.

64. ***Первый замечательный предел.*** Докажите, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x} = 1$.

65. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x - \sin 3x}{\sin x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x - \cos 3x}{x^2}$; д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}$.

66. Сделав подходящую замену, вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 1}\left((1-x)\cdot\operatorname{tg}\frac{\pi x}{2}\right)$; б) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\operatorname{tg} 2x\cdot\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\right)$; в) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{3}}\frac{\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)}{1-2\cos x}$;

Домашнее задание

67. Докажите, что если функция $f(x)$ не убывает на интервале $(a;\ b)$ и не ограничена на нем сверху, то $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = +\infty$.

68. Доопределите функцию Кантора по непрерывности (т.е. так, чтобы ее областью определения стал отрезок $[0;\ 1]$, и функция была бы непрерывна на всей области определения). Найдите в соответствии с данным определением $C(\frac{1}{4})$.

69. Сформулируйте определение предела функции при $x \to +\infty$ по Гейне и докажите его корректность.

70. Сформулируйте определения односторонних пределов по Гейне.

71. Существует ли: а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\sin x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\sin\frac{1}{x})$?

72. Вычислите пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}(x\cdot\operatorname{ctg} 3x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x - \sin x}{\sin^3 x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x - \sin a}{x - a}$; г) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - 1}$;
д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 3x + \sin 7x}{\cos 4x - \cos 6x}$; е) $\lim\limits_{x\to 1}(x^2-1)\operatorname{ctg}\pi x$; ж) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)}{\operatorname{tg} x - \operatorname{ctg} x}$; з) $\lim\limits_{x\to -2}\frac{x+2}{\cos\frac{\pi}{x}}$.