Действительные числа

Натуральные и рациональные числа (повторение)

Натуральные числа получаются в результате счета предметов. Рациональные — в результате практических измерений величин.

1. Вспомните определение рациональных чисел.
2. Как сопоставить каждому рациональному числу точку на прямой?
3. Пусть выбран отрезок единичной длины. Верно ли, что длина любого отрезка выражается рациональным числом?

   Предположим возможным измерение со сколь угодно высокой точностью. Его результат можно описать с помощью бесконечной последовательности десятичных приближений (a_n) по недостатку. Вместо нее достаточно записать одну бесконечную десятичную дробь.
4. Как задать бесконечную десятичную дробь с помощью последовательности натуральных чисел?
5. Может ли в результате измерений с возрастающей точностью получиться бесконечная десятичная дробь с периодом 9?

Определение действительного числа

Определение. ***Положительным действительным числом a*** называют бесконечную десятичную дробь $N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, не оканчивающуюся последовательностью девяток, где N — произвольное натуральное число или ноль, а $n_1, n_2, \dots, n_k, \dots$ принимают значения $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9$.
Отрицательным действительным числом a называют бесконечную десятичную дробь $-N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$, не оканчивающуюся последовательностью девяток. Числа $N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ и $-N, n_1 n_2 \dots n_k \dots$ называют ***противоположными***.

Каждой точке прямой соответствует действительное число.

6. Докажите, что множество действительных чисел несчетно.
7. Могут ли все десятичные приближения положительного действительного числа по недостатку, начиная с некоторого, совпадать?

   Пусть a_n — десятичное приближение числа a по недостатку с точностью до $n-\mathbf{го}$ знака после запятой. Тогда $a_n^* = a_n + \frac{1}{10^n}$ — десятичное приближение числа a по избытку. Заметим, что $a_n \leqslant a \leqslant a_n^*$.
8. Докажите, что для любого числа a последовательность (a_n) неубывающая, а (a_n^*) — невозрастающая.

   Положительные действительные числа сравнивают поразрядно. Любое отрицательное действительное число меньше любого положительного. Ноль больше отрицательных чисел и меньше положительных. Из двух отрицательных чисел больше то, противоположное которому меньше.
9. Верно ли, что действительное число больше любого своего приближения по недостатку?
10. Докажите, что между любыми двумя различными: а) рациональными числами найдется рациональное число; б) действительными числами найдется рациональное число.
11. Докажите, что для сколь угодно малого действительного числа $\varepsilon > 0$ и натурального числа k при достаточно большом значении n выполняется неравенство $\frac{k}{10^n} < \varepsilon$.
12. Существует ли: а) наибольшее число, меньшее $1,5$;
    б) наибольшее число, меньшее $1,5$, в запись которого не входит цифра 9?

Разделяющее число. Аксиома непрерывности

Определение. Число b называется ***верхней гранью*** числового множества A, если любой элемент множества A не превосходит b.

Запись: $(\forall x \in A)(x \leqslant b)$

Множество, имеющее верхнюю грань, называется ***ограниченным сверху***.

13. Запишите определение нижней грани.

Множество называется ***ограниченным***, если оно ограничено и сверху, и снизу.

14. Какие числа являются верхними и нижними гранями множества всех десятичных приближений по избытку числа $\sqrt{2}$?

Определение. Пусть $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}$ — непустые числовые множества. Множество $\boldsymbol{R}$ называется ***расположенным справа*** от $\boldsymbol{L}$, если любой элемент $\boldsymbol{R}$ не меньше любого элемента $\boldsymbol{L}$.

Определение. Пусть $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}$ — непустые числовые множества. Число ***c разделяет*** эти множества, если оно является верхней гранью $\boldsymbol{L}$ и нижней гранью $\boldsymbol{R}$ (т.е. $(\forall \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L})(\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R})(\boldsymbol{l} \leqslant \boldsymbol{c} \leqslant \boldsymbol{r})$.

15. Докажите, что если у двух множеств есть разделяющее число, то одно из множеств расположено справа от другого.
16. Может ли у двух множеств быть ровно: а) 1; б)2; в) 1000 разделяющих чисел?
17. Сформулируйте с помощью разделяющего числа определение длины окружности и площади круга.
18. Пусть $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}$ — непустые множества рациональных чисел, причем $\boldsymbol{R}$ расположено справа от $\boldsymbol{L}$. Всегда ли существует разделяющее их рациональное рациональное число?

Важнейшее отличие множеств $\mathbb{Q}$ и $\mathbb{R}$ описывает следующая

Теорема. Если множество $\boldsymbol{R}$ лежит справа от множества $\boldsymbol{L}$, то существует хотя бы одно число, разделяющее эти множества.

Этот факт называют ***аксиомой непрерывности***, а также аксиомой полноты и аксиомой отделимости.

19. Выходит, мы доказали аксиому?!
20. Пусть $\boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{R}$ — такие множества действительных чисел, что $(\forall \boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L})(\forall \boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R})(\boldsymbol{l} < \boldsymbol{r})$. Можно ли утверждать, что найдется $\boldsymbol{c}$, при котором $\boldsymbol{l} < \boldsymbol{c} < \boldsymbol{r}$ для всех $\boldsymbol{l} \in \boldsymbol{L}$ и $\boldsymbol{r} \in \boldsymbol{R}$?

Теорема. Пусть множество $\boldsymbol{R}$ лежит справа от множества $\boldsymbol{L}$. Для того чтобы они разделялись лишь одним числом, необходимо и достаточно, чтобы существовали отрезки сколь угодно малой длины, содержащие точки из обоих множеств.

21. Докажите корректность данных выше определений длины окружности и площади круга.
22. Докажите, что существует $\sqrt{2}$.

Два следствия из аксиомы непрерывности

Принцип вложенных отрезков. *Пусть на числовой прямой имеется бесконечная последовательность вложенных отрезков* $[\boldsymbol{x_1};\ \boldsymbol{y_1}];\ [\boldsymbol{x_2};\ \boldsymbol{y_2}];\ \ldots;[\boldsymbol{x_n};\ \boldsymbol{y_n}];\ \ldots$ *(т.е.* $\boldsymbol{x_1} \leqslant \boldsymbol{x_2} \leqslant \ldots \leqslant \boldsymbol{x_n}$, *а* $\boldsymbol{y_1} \geqslant \boldsymbol{y_2} \geqslant \ldots \geqslant \boldsymbol{y_n}$*). Тогда пересечение всех этих отрезков непусто.*

23. Докажите принцип вложенных отрезков, пользуясь аксиомой непрерывности.
24. Верен ли аналогичный принцип вложенных интервалов?
25. Верен ли принцип вложенных отрезков на множестве рациональных чисел? А принцип вложенных интервалов?

Определение. Наименьшая верхняя грань множества $\boldsymbol{A}$ называется его ***точной верхней гранью*** *и обозначается* $\boldsymbol{sup\ A}$ *(suretum).*

Точная нижняя грань определяется аналогично и называется $\boldsymbol{inf\ A}$ (infimum).

Теорема о точной верхней грани. *У всякого непустого ограниченного сверху множества есть точная верхняя грань.*

26. Верна ли аналогичная теорема на множестве рациональных чисел?
27. а) Имеется множество отрезков, любые два из которых имеют общую точку. Можно ли утверждать, что существует точка, принадлежащая всем отрезкам? б) Тот же вопрос для интервалов. в) Тот же вопрос для кругов на плоскости. г) Тот же вопрос для прямоугольников на плоскости, стороны которых параллельны осям координат.