# Тригонометрия - 2

## *Периодические функции*

*Определение.* Число $T$ называется ***периодом*** функции $f(x)$, если для любого $x$ их области определения $f(x)$ выполняются равенства

$$f(x-T)=f(x)=f(x+T).$$

1. Всякая ли функция имеет период?
2. Что можно сказать о функции, периодами которой являются все числа?
3. Пусть функция $f(x)$ имеет периоды $T_1$ и $T_2$, Докажите, что ее периодами также являются числа: а) $-T_1$; б) $T_1+T_2$; в) $nT_1$; г) $nT_1+kT_2$, где $n, k$ — произвольные целые числа.

   *Определение.* Функция, имеющая ненулевой период, называется ***периодической***.
4. Найдите наименьший положительный период функции: а) $f(x)=\{x\}$; б) $f(x)=\{3x\}$.
5. Докажите, что если у функции есть наименьший положительный период $T$, то все остальные периоды кратны $T$. Наименьший положительный период функции называется ее ***основным*** периодом.
6. Найдите основной период функции: а) $f(x)=\left\{\frac{x}{3}\right\}+3\left\{\frac{x}{5}\right\}$; б) $f(x)=\{3x\}+8\{5x\}$; в) $f(x)=\sqrt{1+\{4x\}}$.
7. Является ли периодической функция: а) $f(x)=\{x^2\}$; б) $f(x)=\{x\}+\{x\sqrt{2}\}$?

## *Свойства тригонометрических функций*

*Теорема.* Функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ периодические. Их основной период равен $2\pi$. Функции $y=\operatorname{tg} x$, $y=\operatorname{ctg} x$ периодические. Их основной период равен $\pi$.

8. Найдите период функции: а) $f(x)=\sin 3x+2\cos 5x$; б) $f(x)=\sqrt{\sin\frac{4}{5}x+3\operatorname{tg}\frac{7}{8}x+\cos 5x}$.
9. Вычислите а) $\sin\frac{47\pi}{6}$; б) $\cos 1543\pi$; в) $\operatorname{tg}\frac{26\pi}{3}$; г) $\operatorname{ctg}\frac{199\pi}{4}$.

   *Теорема.* Функция $y=\cos x$ — четная, а функции $y=\sin x$, $y=\cos x$ и $y=\cos x$ — нечетные.

## *Формулы приведения*

10. а) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\pi+\alpha}$?
    б) Докажите формулы
    $$\sin(\pi+\alpha)=-\sin\alpha;\qquad \cos(\pi+\alpha)=-\cos\alpha.$$
11. а) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\pi-\alpha}$?
    б) Докажите формулы
    $$\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha;\qquad \cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha.$$
12. а) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\frac{\pi}{2}-\alpha}$?
    б) Докажите формулы
    $$\sin(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\cos\alpha;\qquad \cos(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\sin\alpha;\qquad \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{ctg}\alpha;\qquad \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}-\alpha)=\operatorname{tg}\alpha.$$
13. а) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\frac{\pi}{2}+\alpha}$?
    б) Докажите формулы
    $$\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)=\cos\alpha;\qquad \cos(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\sin\alpha;\qquad \operatorname{tg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{ctg}\alpha;\qquad \operatorname{ctg}(\frac{\pi}{2}+\alpha)=-\operatorname{tg}\alpha.$$

Формулы, полученные в 4 последних задачах, и аналогичные им называются формулами приведения. Они позволяют привести тригонометрическую функцию от любого аргумента к функции от аргумента, находящегося в 1 четверти тригонометрического круга (и даже в ее первой половине). Пользуясь периодичностью тригонометрических функций, можно продолжать ряд формул приведения сколь угодно долго. Чтобы не учить много отдельных формул, используют мнемоническое правило:

1) Пусть в левой части формулы стоит функция от $\alpha+\phi$, $\alpha-\phi$ или $\phi-\alpha$, где $\phi=\frac{\pi n}{2}$. Если $\pi$ укладывается в $\phi$ целое число раз (при этом $\alpha$ откладывается от оси $Ox$), то название функции не меняется. Если $\pi$ укладывается в $\phi$ "полуцелое"число раз ($\alpha$ откладывается от оси $Oy$), то название функции меняется на кофункцию (синус на косинус и обратно, тангенс на котангенс и обратно)

2) При определении знака можно считать, что аргумент принадлежит первой четверти.

*Графики тригонометрических функций*

Исследуем каждую из тригонометрических функций по стандартному плану:

1) область определения и область значений функции

2) четность (нечетность)

3) периодичность (с указанием основного периода)

Благодаря (не)четности, периодичности и формулам $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha, \quad \cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$ достаточно построить график каждой тригонометрической функции на отрезке $[0; \frac{\pi}{2}]$, а затем продолжить на всю ось. А для этого определить, возрастает или убывает функция на указанном отрезке и отметить контрольные точки.

4) нули функции

5) интервалы знакопостоянства

6) промежутки монотонности

7) наличие асимптот

График функции $y = \sin x$ называется ***синусоидой***, а график функции $y = \operatorname{tg} x$ — ***тангенсоидой***.

14. Докажите, что как геометрическая фигура график функции: а) $y = \cos x$ равен синусоиде; б) $y = \operatorname{ctg} x$ равен тангенсоиде.
15. Как отражаются на графиках функций $y = \sin x$ и $y = \operatorname{tg} x$ приближенные равенства $\sin x \approx x \approx \operatorname{tg} x$ для малых $x$?
16. Постройте график функции: а) $y = 1 - \operatorname{tg}(x + \frac{\pi}{4})$; б) $y = 2\sin(\frac{\pi}{3} - x)$.
17. Определите знак разности: а) $\operatorname{ctg}\left(7\frac{3}{14}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(9\frac{8}{27}\pi\right)$; б) $\operatorname{tg}\left(7\frac{3}{14}\pi\right) - \operatorname{ctg}\left(9\frac{8}{27}\pi\right)$.

*Дополнительные задачи*

18. а) У всякой ли периодической функции найдется наименьший положительный период?
б) Существует ли такая функция, что любое рациональное число является ее периодом, а любое иррациональное — нет?
в) Существует ли такая функция, что любое иррациональное число является ее периодом, а любое рациональное — нет?
19. Может ли функция $f(x)$ иметь основной период 2, функция $g(x)$ — 6, а функция $f(x) + g(x)$ — 3?
20. Вычислите: а) $\operatorname{tg} 1^\circ \operatorname{tg} 2^\circ \ldots \operatorname{tg} 89^\circ$; б) $\operatorname{ctg} 1^\circ + \operatorname{ctg} 2^\circ + \ldots + \operatorname{ctg} 179^\circ$; в) $\operatorname{ctg} 1^\circ \operatorname{ctg} 2^\circ \ldots \operatorname{ctg} 179^\circ$.
21. Расположите в порядке возрастания числа $\sin 1$, $\sin 10$ и $\sin 13$.

*Домашнее задание*

22. Найдите основной период функции $f(x) = \sqrt{\{5, 3x\} - \left\{5x + \frac{1}{4}\right\} + 4}$.
23. Определите, является ли функция периодической. Если да, то укажите наименьший положительный период.
а) $y = \cos\sqrt{x}$; б) $y = \cos\sqrt{|x|}$; в) $y = \sqrt{\cos x}$; г) $y = \sqrt{|\cos x|}$.
24. а) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\frac{3\pi}{2}+\alpha}$?
б) Какое движение переводит точку $P_\alpha$ в точку $P_{\frac{3\pi}{2}-\alpha}$?
25. Постройте график функции: а) $y = \operatorname{tg}(\frac{x}{2})$; б) $y = |1 - 2\sin(x + \frac{\pi}{4})|$; в) $y = \cos(|2x| - \frac{2\pi}{3})$; $y = \operatorname{ctg}|\frac{\pi}{6} - x|$.
26. Возьмите цилиндр (например, свечу или сосиску), намотайте на него лист бумаги в несколько слоев и аккуратно разрежьте все это острым ножом наискосок. Разверните бумагу. Докажите, что линия разреза является синусоидой.
27. Сравните числа: а) $\cos\frac{19\pi}{9}$ и $\cos(-\frac{13\pi}{6})$; б) $\sin\frac{17\pi}{5}$ и $\cos(-\frac{6\pi}{7})$; в) $\sin 7$ и $\cos 7$.