Тригонометрия - 1

Радианная мера угла

Определение. Рассмотрим окружность, ее центральный угол и высекаемую им дугу. ***Радианной мерой угла*** называется отношение длины дуги к радиусу окружности.

Таким образом, ***1 радиан*** - величина центрального угла, длина дуги которого равна радиусу окружности.

1. а) Выразите в радианах угол, равный $36°$, $330°$.
   б) Выразите в градусах угол, равный $\frac{3\pi}{2}$, 1.
2. Запишите формулы длины дуги l и площади сектора S, если радиус окружности равен R, а центральный угол равен α и измерен: а) в градусах; б) в радианах.
3. Составьте таблицу перехода от градусной меры к радианной для углов $30°$, $45°$, $60°$, $90°$, $120°$, $135°$, $150°$, $180°$, $270°$, $360°$.
4. Составьте таблицу значений $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ для значений $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}$.
5. Найдите значение выражения: а) $\left(\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^{-2}$; б) $\dfrac{\left(\cos\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \sin\frac{3\pi}{2}\right)^2}{2\sin\frac{\pi}{6}\operatorname{tg}\frac{\pi}{4} + \cos(-\pi) - \sin\frac{\pi}{4}}$.

Тригонометрические функции числового аргумента

Рассмотрим отображение множества действительных чисел на единичную окружность. Числу 0 сопоставим точку $P_0(1, 0)$. Произвольному числу α — точку P_α — образ точки P_0 при повороте с центром в начале координат на угол α радиан. Это отображение называют намоткой действительной прямой на окружность, а получившуюся окружность — ***тригонометрическим кругом***.

6. Отметьте на тригонометрическом круге числа π, $-\pi$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{3\pi}{2}$, $-\frac{\pi}{2}$, $\frac{\pi}{4}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$.
7. Отметьте на тригонометрическом круге все точки вида:
   а) $\frac{\pi}{4} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; б) $-\frac{\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$; в) $\frac{\pi n}{3}$, где $n \in \mathbb{Z}$;

   Определение. Пусть точка P_α изображает на тригонометрическом круге число α. Ордината точки P_α называется ***синусом*** α, а абсцисса — ***косинусом*** α.
   $\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$.
8. Как согласуется последнее определение с определениями синуса, косинуса, тангенса и котангенса острого угла прямоугольного треугольника?
9. Проведем касательную l к единичной окружности в точке P_0. Пусть T_α — точка ее пересечения с прямой, проведенной через точку P_α и начало координат. Докажите, что: а) T_α существует тогда и только тогда, когда $\cos\alpha \neq 0$; б) в этом случае ордината точки T_α равна $\operatorname{tg}\alpha$. Прямую l называют ***линией тангенсов***.
10. Определите аналогичным образом ***линию котангенсов***.
11. Углом какой четверти является угол α, если а) $\sin\alpha < 0$, $\cos\alpha > 0$; б) $\cos\alpha < 0$, $\operatorname{tg}\alpha > 0$?
12. Оцените выражение: а) $2 - 3\sin\alpha$; б) $|3 + 4\cos\alpha|$.
13. Возможно ли равенство $5\cos\alpha - 3\sin\alpha = 8$?
14. Сравните числа: а) $\cos 1$ и $\cos 2$; б) $\sin 1$ и $\sin 2$.
15. Определите знак числа $\sin\cos 2$.
16. Решите уравнение: а) $\sin\alpha = 1$; б) $\operatorname{tg}\alpha = 0$; в) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Дополнительные задачи

17. Запишите, чему равна угловая скорость часовой, минутной и секундной стрелок (в радианах в минуту).
18. Во сколько раз угол в π градусов меньше угла в 1 радиан?
19. Объясните, почему для малых углов верны приближенные равенства $\sin\alpha \approx \alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$. (Например, относительная погрешность первого равенства для углов, меньших $10°$, не превышает 1%)
20. Астрономы измеряют расстояния в парсеках. 1 парсек — это расстояние, с которого радиус (точнее, большая полуось) земной орбиты виден под углом $1''$. Сколько километров в 1 парсеке? $R \approx 150\,000\,000$ км.
21. Военные измеряют малые углы в тысячных. 1 тысячная — это $\frac{1}{3000}$ развернутого угла. Расстояние Р до удаленных предметов известной высоты В приближенно определяется по формуле $\mathrm{P} = \frac{\mathrm{B}}{\mathrm{У}} \cdot 1000$, где У — угол, под которым виден предмет, измеренный в тысячных. Чему равно число π с точки зрения военных?
22. Колесо радиуса 1 касалось оси абсцисс в начале координат. В момент времени 0 оно покатилось по оси абсцисс направо со скоростью 1 (т.е. за время t его центр смещается на t). Пусть М — точка на окружности колеса, совпадавшая вначале с началом координат. Запишите ее координаты x и y как функции от времени t. Нарисуйте примерно траекторию точки M. Эта кривая называется ***циклоидой***.

Домашнее задание

23. Составьте таблицу значений $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $\operatorname{tg}\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$ для значений $\alpha = 0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}, \frac{2\pi}{3}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{6}, \pi$.
24. Найдите значение выражения а) $\operatorname{ctg}\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3}\sin\frac{\pi}{4}$; б) $\left(\sin\frac{\pi}{3}\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$; в) $\dfrac{4\operatorname{tg}0 - 2\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\operatorname{ctg}\frac{\pi}{3}}{\left(\sin\left(-\frac{3\pi}{2}\right) - \cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right)^2}$.
25. Вычислите $1 - \operatorname{tg}\frac{\pi}{6} + \operatorname{tg}^2\frac{\pi}{6} - \operatorname{tg}^3\frac{\pi}{6} + \ldots$.
26. Решите уравнение: а) $\sin\alpha = 0$; в) $\cos\alpha = 1$; д) $\operatorname{tg}\alpha = \sqrt{3}$; ж) $\operatorname{ctg}\alpha = 0$;
    б) $\sin\alpha = -\frac{1}{2}$; г) $\cos\alpha = \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\operatorname{tg}\alpha = -1$; з) $\operatorname{ctg}\alpha = -\frac{1}{\sqrt{3}}$.
27. Решите уравнение $\cos\beta = 2a - a^2 - 2$.
28. Определите знак выражения $\sin\frac{4\pi}{7}\cos\left(-\frac{4\pi}{9}\right)\operatorname{tg}\frac{4\pi}{5}\operatorname{ctg}\left(-\frac{4\pi}{11}\right)$.
29. Сравните два числа: а) $\sin\frac{\pi}{10}$ и $\sin^2\frac{\pi}{10}$; б) $\cos\frac{3\pi}{5}$ и $\cos\frac{3\pi}{5}\sin\frac{\pi}{5}$.

Основное тригонометрическое тождество

30. Докажите основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$
    и его следствия: $\operatorname{tg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$, $\operatorname{ctg}^2\alpha + 1 = \frac{1}{\sin^2\alpha}$
31. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2,4$ и $\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{3\pi}{2}$. Найдите $\operatorname{ctg}\alpha$ и $\sin\alpha$.
32. Упростите выражение: а) $\frac{1-\sin^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} + \operatorname{tg}\alpha\operatorname{ctg}\alpha$; б) $\operatorname{ctg}\alpha - \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$, если $\pi < \alpha < 2\pi$.
33. Докажите тождество $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha + 3\sin^2\alpha\cos^2\alpha = 1$.
34. Докажите, что при всех допустимых значениях переменной выражение $\dfrac{(\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)^2 - (\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{ctg}\alpha)^2}{\frac{1}{\sin^2\alpha\cos^2\alpha} - \operatorname{tg}^2\alpha - \operatorname{ctg}^2\alpha}$ принимает одно и то же значение.
35. Известно, что $\operatorname{tg}\alpha = 2$. Найдите: а) $\frac{3\sin\alpha - 5\cos\alpha}{4\sin\alpha + \cos\alpha}$; б) $\frac{\sin\alpha - 2\cos\alpha}{2\sin^3\alpha + \cos^3\alpha}$.
36. Найдите область значений функции: а) $f(x) = 3\cos^2 x - 4\sin^2 x$; б) $5\cos^2 x - \operatorname{tg} x\operatorname{ctg} x$.
37. Докажите неравенство: $\sin^2\alpha\cos^2\alpha \le 0,25$; б) $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha \ge 0,5$; в) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha \ge 0,25$.
38. Докажите неравенство $\sin\alpha + \cos\alpha + \operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha + \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \ge 6$, если $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.
39. Найдите $\cos\alpha + \sin\alpha$, если $\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{ctg}\alpha = a$.
40. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $2\cos^2\alpha - 3\sin\alpha$.
41. Найдите наименьшее значение выражения $\operatorname{tg}^2\alpha + \frac{1}{\cos\alpha}$.

Домашнее задание

42. Найдите: а) $\sin\alpha$ и $\operatorname{ctg}\alpha$, если $\cos\alpha = -\frac{7}{25}$ и $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$; б) $\cos\alpha$ и $\operatorname{tg}\alpha$, если $\operatorname{ctg}\alpha = -0,75$ и $\pi < \alpha < 2\pi$.
43. Упростите выражение: а) $\frac{\cos\alpha}{1+\sin\alpha} + \operatorname{tg}\alpha$; б) $\sqrt{\sin^2\alpha(1-\operatorname{ctg}\alpha) + \cos^2\alpha(1-\operatorname{tg}\alpha)}$, если $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$;
    в) $\sqrt{2-2\cos^2\beta} + \sqrt{2\sin^2\beta - 2\sqrt{2}\sin\beta + 1}$, если $\frac{3\pi}{4} \le \beta \le \pi$.
44. Докажите тождество: а) $(-\cos\alpha + \operatorname{ctg}\alpha)(\sin\alpha + \operatorname{tg}\alpha) = (1+\cos\alpha)(1-\sin\alpha)$; б) $\dfrac{\cos\alpha\operatorname{ctg}\alpha - \sin\alpha\operatorname{tg}\alpha}{(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 - \sin\alpha\cos\alpha} = \dfrac{1}{\sin\alpha} - \dfrac{1}{\cos\alpha}$.
45. Известно, что $\operatorname{ctg}\alpha = -2$. Найдите : а) $\frac{2\cos^2\alpha - 7\sin 2\alpha}{3\cos^2\alpha + 4\sin\alpha\cos\alpha}$; б) $\sin^6\alpha + \cos^6\alpha$.
46. Докажите неравенство: а) $\sin^8\alpha + \cos^8\alpha \ge 0,125$; б) $\operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{ctg}^2\alpha + \frac{1}{\sin^2\alpha} + \frac{1}{\cos^2\alpha} \ge 6$.
47. Найдите $\sin^4\alpha + \cos^4\alpha$, если $\sin\alpha + \cos\alpha = a$.
48. Известно, что $\sin^2\alpha\cos^2\alpha = a$. Найдите $\frac{\sin^{10}\alpha}{1-\operatorname{tg}^4\alpha} + \frac{\cos^{10}\alpha}{1-\operatorname{ctg}^4\alpha}$.
49. Найдите наибольшее и наименьшее значения выражения $1 - \sqrt{\cos^2\alpha} - 2\sin^2\alpha$.
50. Найдите наибольшее значение выражения $\sin^2 x\cos^4 x(2-\sin^2 x)$.
51. Постройте график функции $y = \operatorname{tg} x \cdot \operatorname{ctg} x$.