9 математический класс **15 мая 2010 года.**

Центр масс. Упражнения.

Напомним, что для произвольной точки X точку M из равенства $\overrightarrow{XM} = \frac{m_1\overrightarrow{XA_1}+m_2\overrightarrow{XA_2}+\dots+m_n\overrightarrow{XA_n}}{m_1+m_2+\dots+m_n}$ принято называть ***центром масс системы материальных точек*** $A_1(m_1)$, $A_2(m_2)$,... $A_n(m_n)$.

Центр масс обладает характеристическим свойством: $m_1\overrightarrow{MA_1} + m_2\overrightarrow{MA_2} + \dots + m_n\overrightarrow{MA_n} = \overrightarrow{0}$.

1) Известно, что $\overrightarrow{AB} = 0,4\overrightarrow{AC}$. Распределите единичную массу между точками A и C так, чтобы их центр масс был в точке B. (Выражение "распределите единичную массу" здесь и далее означает, что точкам нужно приписать массы, в сумме дающие 1.)

2) Распределите единичную массу по трём вершинам треугольника так, чтобы центр масс делил одну из медиан в отношении $1:2$, считая от вершины.

3) На сторонах AB и BC треугольника ABC выбраны точки P и Q соответственно. Отрезки PC и AQ пересекаются в точке E. Известно, что $AE : EQ = 5 : 2$ и $CE : EP = 7 : 6$. Нагрузите вершины треугольника массами так, чтобы центр масс попал в точку E. Вычислите $AP : PB$ и $BQ : QC$.

4) Пусть $ABCD$ — квадрат со стороной a. Точка P удовлетворяет условию $2\overrightarrow{PA} + 3\overrightarrow{PB} + 4\overrightarrow{PC} + 7\overrightarrow{PD} = \overrightarrow{0}$. На каком расстоянии находится точка P от центра квадрата?

5) Каждую вершину четырёхугольника соединяют с точкой пересечения медиан треугольника, образованного тремя остальными вершинами. Докажите, что четыре построенные таким образом прямые пересекаются в одной точке.

6) С помощью понятия центра масс докажите теорему Ван-Обеля: если отрезки AA', BB', CC', соединяющие вершины треугольника ABC с точками на его противоположных сторонах, пересекаются в одной точке M, то
$\frac{AB'}{B'C} + \frac{AC'}{C'B} = \frac{AM}{MA'}$.

7) (Важный факт!) Пусть M — точка внутри треугольника ABC. Пусть площадь треугольника AMB равна S_C, площадь AMC равна S_B и площадь BMC равна S_A. Докажите, что M — центр масс $A(S_A)$, $B(S_B)$, $C(S_C)$.

8) (Внимание, новая идея!) Все рассуждения в лекции почти не использовали положительность масс. Они останутся в силе даже если среди чисел m_i будут нулевые или отрицательные. Надо только следить, чтобы сумма масс не равнялась нулю, иначе центр масс существовать не будет. За этим же надо следить и применяя группировку. Где будет центр масс треугольника ABC, если развесить массы $A(1)$, $B(-1)$, $C(-1)$?

9) Какие массы нужно повесить в вершинах треугольника ABC, чтобы центр масс был в ортоцентре?

10) Какие массы нужно повесить в вершинах треугольника ABC, чтобы центр масс был в центре описанной окружности?

11) Вневписанная окружность треугольника ABC касается его стороны BC в точке T, а продолжений сторон AB и AC в точках P и Q соответственно. Докажите, что точка пересечения отрезков CP и BQ лежит на прямой AT.