Гимназия 1543, 9-В класс, 23 апреля.

Производящие функции. Упражнения.

1) Найдите произведения следующих формальных степенных рядов (явные формулы для коэффициентов произведения):

а) $(1+x+x^2+x^3+\ldots)\cdot(1-x+x^2-x^3+\ldots)$;

б) $(1+x+x^2+x^3+\ldots)^2$;

в) $\left(1+x+\dfrac{x^2}{2!}+\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{x^n}{n!}+\ldots\right)\cdot\left(1-x+\dfrac{x^2}{2!}-\dfrac{x^3}{3!}+\ldots+\dfrac{(-x)^n}{n!}+\ldots\right)$.

2) Пусть каждый из формальных степенных рядов $\tilde{a}(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots$ и $\tilde{b}(x)=b_0+b_1x+b_3x^3+\ldots$ имеет целые коэффициенты. Нулевой член каждой последовательности не равен нулю: $a_0\neq 0$ и $b_0\neq 0$. При каких условиях на коэффициенты этих рядов:

а) Ряд $\tilde{a}^{-1}(x)$ будет иметь целые коэффициенты?

б) Ряд $\tilde{a}(x)\tilde{b}^{-1}(x)$ будет иметь целые коэффициенты?

3) Найдите производящие функции следующих последовательностей (ответом должно быть арифметическое выражение над конечными рядами):

а) $a_n=n$; a: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, …

б) $a_n=n^2$; a: 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, …

в) $a_n=n(n+1)$; a: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, …

г) $a_n=C_m^n$; a: $1, m, \dfrac{m(m-1)}{2}, \dfrac{m(m-1)(m-2)}{6}, \ldots$

Гимназия 1543, 9-В класс, 29 апреля.

Разложение рациональной функции в сумму простейших.

1) Докажите, что при любых $x_1\neq x_2$ и любых a и b существуют A и B такие, что: $\dfrac{ax+b}{(x-x_1)(x-x_2)}=\dfrac{A}{x-x_1}+\dfrac{B}{x-x_2}$.

2) Найдите коэффициенты A и B: $\dfrac{1}{x^2+3x+2}=\dfrac{A}{x+1}+\dfrac{B}{x+2}$.

3) Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Докажите, что если $Q(x_0)\neq 0$, то существуют единственные многочлен $P_0(x)$ и число A такие, что выполнено:

$$\frac{P(x)}{(x-x_0)^kQ(x)}=\frac{A}{(x-x_0)^k}+\frac{P_0(x)}{(x-x_0)^{k-1}Q(x)}.$$

(подсказка: домножьте равенство на знаменатель первой дроби)

4) Найдите коэффициенты A, B и C: $\dfrac{x^2+x}{(x-1)^2}=C+\dfrac{A}{x-1}+\dfrac{B}{(x-1)^2}$.

5) Пусть $Q(x)=(x-x_1)^{k_1}\ldots(x-x_m)^{k_m}$. Докажите, что коэффициенты a_{ij} и многочлен $P_0(x)$ определяются единственным образом из равенства:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}=P_0(x)+\frac{a_{11}}{x-x_1}+\ldots+\frac{a_{1k_1}}{(x-x_1)^{k_1}}+\ldots+\frac{a_{p1}}{x-x_m}+\ldots+\frac{a_{mk_m}}{(x-x_m)^{k_m}}.$$

Гимназия 1543, 9-В класс, 14 мая.

Производная ряда и формула бинома. Упражнения.

Краткое напоминание. Пусть $\tilde{a}$ — формальный степенной ряд. Его производной $D\tilde{a}$ называется ряд $\tilde{b}$ с коэффициентами $b_k=(k+1)a_{k+1}$. Операция взятия производной D линейна и для неё выполнено правило Лейбница $D(\tilde{a}\cdot\tilde{b})=\tilde{b}\cdot D\tilde{a}+\tilde{a}\cdot D\tilde{b}$.

1) Логарифмической производной ряда $\tilde{a}$ (с ненулевым свободным членом) называется ряд $D_L\tilde{a}=\dfrac{D\tilde{a}}{\tilde{a}}$. Докажите, что $D_L(\tilde{a}\cdot\tilde{b})=D_L\tilde{a}+D_L\tilde{b}$. (подсказка: приведите дроби из правой части к общему знаменателю и посмотрите на числитель)

2) Найдите логарифмические производные следующих рядов: а) $\tilde{a}=x+1$; б) $\tilde{b}=(x+1)^3$; в) $\tilde{c}=1543(x+1)^3$.

3) Докажите, что $D_L\left(\tilde{a}^k\right)=kD_L\tilde{a}$ для произвольного целого k.

4) Докажите, что $D_L\left(\tilde{a}^{p/q}\right)=\dfrac{p}{q}D_L\tilde{a}$ для произвольной дроби $\dfrac{p}{q}$.

5) Докажите, что если $D_L\tilde{a}=D_L\tilde{b}$, то $\tilde{a}=C\tilde{b}$, где C — некоторое число. (подсказка: воспользуйтесь результатом 3й задачи)

6) Пусть $\tilde{a}(x)=C^0_{p/q}+C^1_{p/q}x+\ldots+C^k_{p/q}x^k+\ldots$ Докажите, что $D_L\tilde{a}=\frac{p}{q}D_L(1+x)$. (напоминание: $C^0_{p/q}=1$, $C^{k+1}_{p/q}=\dfrac{\frac{p}{q}-k}{k+1}C^k_{p/q}$).

Итог: доказана формула бинома $(1+x)^{p/q}=C^0_{p/q}+C^1_{p/q}x+\ldots+C^k_{p/q}x^k+\ldots$ (равенство следует из того, что у ряда $\tilde{a}$ из последней задачи свободный член равен свободному члену ряда $(1+x)^{p/q}$)