Гимназия 1543, 9-В класс, 13 марта.

Топология действительных чисел.

Непрерывность действительной прямой.

Утверждение.

Пусть A и B — два непустых подмножества множества действительных чисел $\mathbb{R}$. Пусть при этом любая точка A не превосходит ни одну из точек B (говорят, что множество A лежит левее множества B). Тогда найдётся точка c такая, что для любых $a \in A$, $b \in B$ выполнено $a \leqslant c \leqslant b$ (говорят, что точка c разделяет A и B).

Вышеизложенное утверждение называется *аксиомой непрерывности* и является одним из важнейших свойств множества действительных чисел. Оно отличает действительные числа, например, от рациональных. Рассмотрим некоторые полезные его следствия.

Теорема. (Принцип Архимеда)

Пусть a и b — действительные положительные числа. Тогда найдётся такое натуральное n, что $an > b$.

Доказательство. Пусть для некоторой пары a, b принцип Архимеда не выполнен. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ $an \leqslant b$. Перепишем это неравенство в виде: $n \leqslant \dfrac{b}{a}$. Пусть $A = \mathbb{N}$, B — множество чисел, не меньших любого натурального числа. A, очевидно, непусто. B непусто, так как содержит $\dfrac{b}{a}$. Значит есть число c, разделяющее $\mathbb{N}$ и B. При этом существует натуральное число, большее, например, $(c-1)$. Прибавим к этому числу 1. Получим тоже натуральное число, уже большее c. Противоречие.

Теорема. (Принцип вложенных отрезков)

Пусть $X_i = [a_i, b_i]$, $i \in \mathbb{N}$ — последовательность вложенных отрезков ($X_{i+1} \subset X_i$). Тогда $\bigcap\limits_{i=1}^{\infty} X_i$ непусто.

Доказательство. В качестве множества A возьмём множество левых концов отрезков, в качестве множества B возьмём множество правых концов отрезков. Разделяющее их число c будет общим для всех отрезков X_i.

Теорема. (О существовании точной грани)

Пусть непустое множество B ограничено снизу. Тогда множество A всех чисел, ограничивающих B снизу, имеет наибольший элемент (точную нижнюю грань).

Доказательство. Получим из принципа вложенных отрезков и принципа Архимеда. X_1 возьмём так, чтобы левый конец принадлежал A, а правый — B. X_{k+1} получим из X_k делением его пополам, взяв середину X_k левым или правым концом X_{k+1} в зависимости от того, принадлежит ли она A или нет. Получим систему вложенных отрезков, $|X_k| = \dfrac{|X_1|}{2^{k-1}}$. Она имеет общую точку, единственную по принципу Архимеда. Эта точка, очевидно, и будет точной нижней гранью.

Совершенно аналогично определяется точная верхняя грань и доказывается её существование. Понятия точной верхней и нижней грани носят специальные названия: супремум (sup) и инфимум (inf).

Заметим, кстати, что аксиома непрерывности легко доказывается, если постулировать существование точной грани. Действительно, множество нижних граней B содержит A, поэтому точная нижняя грань A разделяет A и B. Таким образом мы получили:

Утверждение.

Следующие свойства действительных чисел эквивалентны:

1) Аксиома непрерывности;
2) Принцип Архимеда и принцип вложенных отрезков;
3) Существование точной грани.

Классификация точек действительной прямой.

Начнём с очень важного определения: *окрестностью* числа x радиуса $\varepsilon > 0$ (или ε-окрестностью) назовём интервал $(x-\varepsilon, x+\varepsilon)$. *Проколотой окрестностью* будем называть такой же интервал, только без самой точки x.

Пусть $A \in \mathbb{R}$ — некоторое подмножество действительной прямой. Будем говорить, что точка x — *внутренняя точка* множества A, если некоторая её окрестность полностью лежит в A. Если некоторая окрестность точки x вообще не пересекается с A, то точка x называется *внешней точкой* множества A. Все остальные точки называются *граничными точками* множества A.

Пример.

Рассмотрим отрезок $[-1, 1]$. Очевидно, любая точка x такая, что $|x| < 1$, является внутренней (достаточно рассмотреть, например, $(1-|x|)$-окрестность). Любая точка x, удовлетворяющая неравенству $|x| > 1$, будет внешней. А вот -1 и 1 ни к тому, ни к другому типу не относятся. Любая их окрестность содержит точки отрезка, но не лежит в нём полностью.

Обозначения.

Множество внутренних точек множества A называется его *внутренностью* и обозначается $\operatorname{Int} A$.
Множество внешних точек множества A называется его *внешностью* и обозначается $\operatorname{Ext} A$.
Множество граничных точек множества A называется его *границей* и обозначается ∂A.
Объединение $\operatorname{Int} A$ и ∂A называется *замыканием* A и обозначается $\bar{A}$.

Некоторые множества не содержат ни одной граничной точки (совпадает со своей внутренностью). Такие множества называются *открытыми*. Есть и другая крайность: множество содержит все свои граничные точки (совпадает со своим замыканием). Такое множество называется *замкнутым*.

Пример.

Интервал $(-1, 1)$ является открытым не замкнутым множеством.
Отрезок $[-1, 1]$ является замкнутым не открытым множеством.

Полуинтервал $[-1, 1)$ не является ни замкнутым, ни открытым.

Прямая $\mathbb{R}$ и пустое множество $\emptyset$ являются (единственными) открытозамкнутыми множествами.

Есть и другая не менее часто используемая классификация точек прямой относительно множества A: внешние, предельные и изолированные точки.

Точка x множества A называется *изолированной*, если какая-то из её проколотых окрестностей с A не пересекается.

Если же любая проколотая окрестость точки x (уже не обязательно принадлежащей A) пересекается с A, то точка x называется предельной точкой множества A.

Пример.
Рассмотрим множество $A = [-1, 0) \cup \{1\}$. Классифицируем точки прямой относительно A.
$\operatorname{Ext} A = (-\infty, -1) \cup (0, 1) \cup (1, +\infty)$.
$\operatorname{Int} A = (-1, 0)$.
$\partial A = \{-1, 0, 1\}$.
Предельные для A точки: $[-1, 0]$.
Изолированные точки: 1.

Теорема. (Основное свойство открытых множеств)
Объединение любой системы открытых множеств открыто. Пересечение любой конечной системы открытых множеств открыто.

Доказательство. Утверждение про пересечение тривиально: любая общая точка системы, внутренняя для каждого из множеств, является внутренней точкой пересечения системы (для каждого из множеств есть окрестность, лежащая в нём; окрестность минимального радиуса лежит в пересечении). Заметим, что так как все множества открыты, то любая их общая точка является внутренней для каждого из множеств системы. Значит, все точки пересечения внутренние для этого пересечения.

Утверждение про объединение не менее тривиально: любая точка объединения есть внутренняя точка одного из множеств системы. У неё есть окрестность, лежащая целиком в этом множестве, а, следовательно, и в объединении множеств системы.