9 математический класс **1 марта 2010 года.**

Разные задачи. Список №6. Срок сдачи до 31 марта.

1) Известно, что в течение суток в каждый момент в интернет-кафе были посетители. Каждый посетитель был в кафе всего один раз и находился там меньше часа. Докажите, что можно выбрать 12 посетителей, которые в кафе не встречались.

Например, можно выбрать тех, кто был в кафе в 1.00, 3.00, 5.00 ... 23.00.

2) Докажите, что если $\{8x\} = \{15x\}$, то $\{26x\} = \{75x\}$. (Напомним, что $\{a\}$ — *дробная часть* числа a, определяемая как разность между a и его *целой частью*, то есть максимальным целым числом, не превосходящим a.)

Дробные части чисел равны тогда и только тогда, когда их разность целая. Из условия получаем, что $7x \in \mathbb{Z}$, а доказать надо, что $49x \in \mathbb{Z}$. Это очевидно.

3) Даны три квадратных трёхчлена, никакие два из которых не имеют общих корней. Зато каждый их этих трёхчленов имеет общий корень с суммой двух оставшихся. Докажите, что сумма этих трёхчленов равна нулю.

Для каждой пары трёхчленов отметим корень, который она имеет с оставшимся. Получится три различных числа. Каждое из них, очевидно, корень суммы всех трёхчленов. Но эта сумма — многочлен степени не выше второй, и три корня у неё могут быть только, если это тождественный ноль.

4) Точки E, F, K, M - соответственно середины отрезков AB, CD, AD, AK в выпуклом четырехугольнике $ABCD$, прямые AF, CM, BK, DE пересекаются в одной точке O. Докажите, что площадь четырехугольника $BOFC$ равна половине площади четырехугольника $ABCD$.

В решении будут использоваться известные приёмы: отношение площадей треугольников с общей высотой равно отношению оснований и отношение площадей треугольников с общим углом равно отношению произведений заключающих этот угол сторон. Можно считать, что $S_{AOM} = S_{KOM} = 1$, $S_{KOD} = 2$. Далее найдём $S_{AOE} = S_{BOE}$. Для этого обозначим $S_{AOE} = S_{BOE} = X$ и запишем соотношения $\frac{EO}{OD} = \frac{X}{4}$ и $\frac{BO}{OK} = \frac{2X}{2}$. Также верно, что $\frac{EO}{OD} \cdot \frac{BO}{OK} = \frac{S_{BOE}}{S_{KOD}} = \frac{X}{2}$. Подставляя сюда два первых соотношения, получим, что $X = 2$. Совершенно аналогично найдём, что $S_{DOF} = S_{FOC} = 6$. Наконец, $\frac{S_{BOC}}{S_{MOK}} = \frac{BO}{OK} \cdot \frac{CO}{OM} = \frac{2}{1} \cdot \frac{6}{1}$, откуда $S_{BOC} = 8$. Далее всё очевидно.

5) В комнате находятся n человек. Каждый из них либо рыцарь, который всегда говорит правду, либо лжец, который всегда лжёт. Один из находящихся в комнате сказал: "В этой комнате k_1 лжецов", второй: "В этой комнате k_2 лжецов", ..., n-ый: "В этой комнате k_n лжецов". Известно, что все числа k_1, ..., k_n не превосходят n. Каково наибольшее возможное значение их суммы?

Ответ: $n^2 - 1$. Если в комнате на самом деле l лжецов, $l < n$, то все $n - l$ рыцарей дадут ответ "l", а все лжецы смогут сказать "n" (а больше — не смогут). Поэтому сумма названных всеми чисел не превысит $(n-1)l + ln = 2ln - l^2$ (причём максимум достижим). Это выражение как функция от l строго возрастает на $[0\,;\, n-1]$, а потому максимально при $l = n - 1$ и равно $n^2 - 1$. В случае же $l = n$ сумма чисел не превысит $n(n-1)$, что не больше, чем $n^2 - 1$.

6) По окончании двухкругового шахматного турнира оказалось, что все участники набрали поровну очков. Докажите, что найдутся два участника, которые одержали поровну побед белыми. (Любые два участника сыграли между собой по две партии: каждый одну партию белыми, а другую черными. Напомним, что за победу в шахматах дают 1 очко, за ничью – пол-очка, за поражение – 0.)

Если игроков было n, то игровых пар было $\frac{n(n-1)}{2}$. Каждая пара за две игры разыграла 2 очка, так что общее число очков равно $n(n-1)$, а поскольку все набрали поровну, значит по $(n-1)$. Предположим, что утверждение задачи неверно. Если у всех побед белыми было по разному числу, то, поскольку побед не могло быть более $n - 1$, остаётся считать, что у одного игрока таких побед было $n - 1$, у другого $n - 2$, и так далее, у последнего 0 — иных вариантов нет. Однако первый, выигравший белыми у всех, чёрными всем проиграл, в том числе и последнему, который играл с ним белыми. Но этот последний белыми не выигрывал — противоречие.

7) Напишите несократимую дробь, равную $\frac{12345678...87654321}{123456789...987654321}$. (В числителе 2000 восьмёрок, в знаменателе 1999 девяток.)

ответ: $\frac{11111111}{111111111}$. Очевидно, что данную в условии (правильную) дробь $\frac{A}{B}$ нужно сократить на $НОД(A,B)$. Если $D = НОД(A,B)$, то $(B-A)\vdots D$. При этом $B - A = 111\ldots100000000$, где количество единиц равно 2007. Понятно, что A и B не кратны ни двойке, ни пятёрке, а поэтому на D делится число $E = 111\ldots1$ (2007 единиц). Но оказывается, что и A и B делятся на E, то есть $E \leqslant D$, но при этом $E\vdots D$, так что $E = D$. После сокращения (деление нетрудно провести в столбик), получим ответ.

8) Можно ли расставить натуральные числа в клетках шахматной доски так, чтобы в каждой паре соседних (имеющих хотя бы одну общую вершину) клеток одно из чисел делилось на другое, а для каждой пары несоседних клеток такого не было?

Нет, это невозможно сделать. Если число делится на число в соседней клетке, нарисуем из неё туда стрелочку. Ясно, что если B – клетка, соседняя для клеток A и C, а сами A и C не соседствуют, то либо из A и C в B ведут стрелки, либо наоборот из B стрелки направлены в A и C. Из этого несложно вывести, что каждая клетка не у края либо "источник" (из неё все стрелки выходят), либо "сток". Если, например, $c4$ – источник, то $c5$ – сток, а тогда $d5$ и источник и сток одновременно.

9) Прямоугольник $ABCD$ вписан в окружность. На диагонали AC выбрана точка K и построена хорда EF с серединой в точке K. Точка M — проекция A на BE, точка N — проекция C на DF. Докажите, что K лежит на прямой MN.

Опустим перпендикуляры AT на BF и CL на ED. Тройки точек $\{M,T,K\}$ и $\{N,L,K\}$ коллинеарны по теореме о прямой Симсона. Чтобы решить задачу, докажем, что тройка точек $\{L,T,K\}$ также лежит на одной прямой. Для этого заметим, что $\angle LKA = \angle LEC = \angle TFA = \angle TKA =$. Здесь крайние равенства следуют из вписанности четырёхугольников $LECK$ и $ATKF$, среднее — из равенства дуг CD и AB. Равенство же $\angle LKA = \angle TKA =$ и даёт нужную коллинеарность.

10) Докажите, что для любых положительных a и b выполняется неравенство $\frac{1}{a+b} + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{5}{2\sqrt{ab}}$.

Обозначим $a + b = S$, $\sqrt{ab} = P$. Неравенство запишется так: $\frac{1}{S} + \frac{S}{P^2} \geqslant \frac{5}{2P}$. После преобразований получаем $\frac{P^2+S^2}{PS} \geqslant \frac{5}{2}$, что означает, что $2P^2 - 5PS + 2S^2 \geqslant 0$. Это преобразуется к виду $(S-2P)(2S-P) \geqslant 0$. И это справедливо, так как $S \geqslant 2P$ есть неравенство о средних, а $2S \geqslant P$ очевидно.

11) Высоты остроугольного неравнобедренного треугольника ABC пересекаются в точке H. Точки M и N – середины отрезков BC и AH соответственно. Докажите, что расстояние между точками пересечения прямой MN с биссектрисами внешнего и внутреннего углов при вершине A равно AH.

Опустим из H перпендикуляры HF на биссектрису внешнего угла при вершине A и HE — на биссектрису внутреннего. Если мы покажем, что E и F лежат на MN, то требуемое равенство последует из равенства диагоналей прямоугольника $FAEH$. Рассмотрим прямую l — серединный перпендикуляр к отрезку $B'C'$, где B' и C' — основания высот из соответствующих вершин. Ясно, что $MB' = MC' = \frac{BC}{2}$, поэтому $M \in l$. Теперь рассмотрим окружность, построенную на AH как на диаметре. В неё вписан шестиугольник $AFC'HEB'$. Поэтому $NB' = NC'$ как радиусы, и $N \in l$. Точки же E и F являются серединами дуг $C'B'$ и $B'C'$, поэтому $EB' = EC'$ и $FB' = FC'$, поэтому эти точки тоже лежат на l, а тогда задача решена.

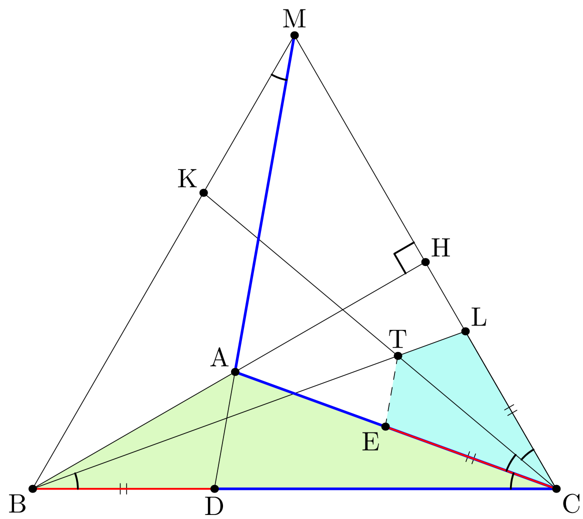
12) На фестиваль военно-морской песни приехали хоры из 100 стран. Каждый хор исполняет три песни и сразу уезжает домой. Ознакомившись с текстами песен, организаторы обнаружили, что каждая песня оскорбительна для одной из стран-участниц. Докажите, что они могут назначить порядок выступлений таким образом, чтобы никому не пришлось выслушивать больше трёх оскорбительных для его страны песен.

Решим задачу индукцией по n — числу стран. База $n = 1$ очевидна. Пусть для $n = k$ можно организовать концерт правильно. Рассмотрим $n = k + 1$ хоров. Общее число песен $3(k + 1)$. Если все хоры оскорблялись бы более чем по 3 раза, общее число оскорбительных песен превысило бы $3(k + 1)$. Но это не так, значит есть хор, который оскорбится не более трёх раз. Пусть он выступает последним, а остальные k хоров организуем в правильном порядке по предположению индукции. Тогда концерт пройдёт хорошо.

13) Найдите все натуральные n, для которых $n! + 3n^2$ – квадрат натурального числа.

Ответ: $n = 1$. Проверка вариантов $n < 6$ показывает, что только при $n = 1$ условие выполнится. Пусть теперь $n > 5$. Ясно, что если n не делится на 3, то (поскольку $n \,\vdots\, 9$) число $n! + 3n^2$ делится на 3, но не на 9, а потому не квадрат. Если же $n \,\vdots\, 3$, то можно записать $n = 3^l \cdot m$, где m не кратно трём. Тогда $3n^2$ делится на 3^{2l+1}, и если окажется, что $n!$ делится на бо́льшую степень числа 3, то $n! + 3n^2$ будет делиться на 3^{2l+1}, а на 3^{2l} не будет, так что не будет точным квадратом. В произведение $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n$ входят по крайней мере числа 3, 6, …, n, кратные трём, всего их $3^{l-1} \cdot m$, так что троек в $n!$ заведомо хватит, если $3^{l-1} \cdot m > 2l + 1$, что при $l > 2$ заведомо так. Если $l = 2$, то есть $n = 9m$, то в числе $(9m)!$ нужно «наскрести» 6 троек, что при $m > 1$, то есть $n \geqslant 18$ вполне удастся. Случай же $m = 1$ ($n = 9$) проверяется руками и отметается. Если $l = 1$, то есть $n = 3m$, то в числе $(3m)!$ нужно «наскрести» 4 тройки, что при $m > 3$ получается, случай $m = 3$ невозможен, случай же $m = 2$ (то есть, $n = 6$) проверяется и отметается.

14) В треугольнике ABC $\angle B = 30°$, $\angle C = 20°$. Точки D и E на сторонах BC и AC соответственно таковы, что $AC = DC$, $EC = BD$. Найдите $\angle EBC$.



Ответ: $\angle EBC = 10°$. Рассмотрим равносторонний треугольник MBC. На его сторонах MB, BC и CM выберем точки K, D и L соответственно так, что $\angle MCK = \angle BMD = \angle CBL = 20°$.(На рисунке дужкой отмечены углы по 20°.) Проведём также высоту BH. Пусть $A = BH \cap MD$. Ясно, что треугольники BMA и BCA симметричны относительно BH и потому равны, то есть $\angle BCA = 20°$. Это означает, что треугольник ABC — в точности тот, о котором говорится в условии задачи (он выделен зелёным цветом). Нетрудно также подсчитать, что $\angle CAD = \angle CDA = 80°$, а поэтому $CA = CD$, то есть точка D также именно та, которая упомянута в условии. Пусть $T = AL \cap CK$. Треугольники BMD и CBL равны (совмещаются поворотом на 120° вокруг центра равностороннего треугольника MBC), поэтому $BD = CL$. Отметим теперь на AC точку E, о которой говорится в условии: так, чтобы $CE = BD$. В силу сказанного выше, получаем, что $CE = CL$, а поскольку $\angle ECT = \angle LCT = 20°$, треугольники ECT и LCT равны по первому признаку (они подкрашены на рисунке). Значит, $\angle LTC = 60° = \angle ETC$. А тогда и $\angle BTE = 60°$. Теперь заметим, что TE и CE — биссектрисы треугольника BTC, а тогда E — его инцентр, поэтому BE также биссектриса $\angle TBC$, то есть $\angle EBC = 10°$.

15) Ариша и Кир играют в игру, ставя по очереди фишки в клетки доски 5×5: Ариша — белые фишки (она начинает игру), а Кир — чёрные. Каждая фишка ставится на свободную клетку. Нельзя ставить фишку на клетку, у которой фишками твоего цвета заняты все соседние клетки (по стороне). Проигрывает не имеющий хода. Кто — Кир или Ариша — победит при наилучшей игре?

Ответ: Ариша. Она может поставить белую фишку в угол, после чего мысленно разбить оставшуся часть поля на доминошки и ходить в ту же доминошку, в которую только что пошёл Кир. Очевидно, у Ариши всегда будет ход, а поэтому ходы кончатся у Кира.