Теорема Холла.

Имеется компания из n юношей и m девушек, каждый из которых дружит с одной или с несколькими девушками. Интересующий нас вопрос состоит в следующем: при каких условиях каждый из n юношей может выбрать себе невесту из числа своих подруг (так, разумеется, чтобы ни одна девушка не была выбрана сразу двумя юношами).

Попробуйте выяснить, возможно ли устроить такое сватовство в примерах, изображённых на рисунках 1-3. Здесь $n = m = 4$; девушки и юноши изображены точками, и от каждой девушки проведены стрелки к тем юношам, которые с нею дружат. Устроить сватовство — значит выбрать 4 ребра, идущих от четырёх *разных* девушек ко всем четырём *разным* юношам.

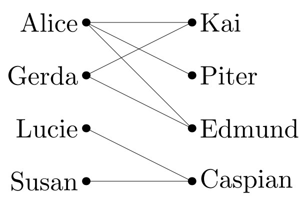

Рисунок 1.

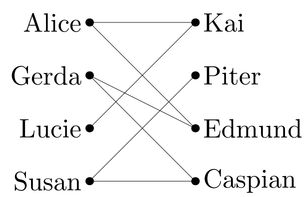

Рисунок 2.

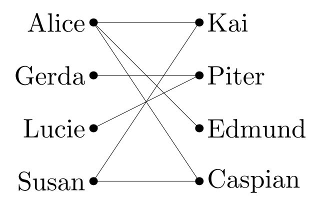

Рисунок 3.

Оказывается, например, что для примера, изображённого на рисунке 1, это делать не удаётся. Не трудно объяснить, почему. Дело в том, что трое юношей — Кай, Питер и Эдмунд — дружат только с двумя девушками — Алисой и Гердой; поэтому одновременно выбрать невест для всех четверых нельзя.

Точно так же в общем случае: чтобы можно было устроить сватовство n юношей, должно выполняться следующее *необходимое* условие. Возьмём любую группу, состоящую из k юношей. Объединим вместе всех девушек, каждая из которых дружит хотя бы с одним юношей из этой группы. Этих девушек должно быть не менее k (иначе уже этим k юношам не хватило бы невест).

Оказывается, что это естественное необходимое условие является и *достаточным.* **Если у любых k юношей ($1 \leqslant k \leqslant n$) имеется не менее k подруг, то можно так организовать сватовство, что каждому юноше достанется по невесте.**

В этом и состоит "теорема о сватовстве" (или, что то же самое, "теорема о различных представителях" или лемма Холла), первое доказательство которой мы сейчас проведём.

Доказательство:
Будем рассуждать по индукции. При $n = 1$ теорема, очевидно, верна. Пусть она верна для любого числа юношей, меньшего n. Докажем, что она верна и для n юношей.

Могут быть только два случая:

Случай 1. При некотором k ($1 \leqslant k \leqslant n$) найдётся группа из k юношей, которые дружат (все вместе) ровно с k девушками.

Обозначим множество этих юношей через $Ю_k$, а множество их подруг — через $Д_k$. Для группы юношей $Ю_k$ выполнено индукционное предположение. При этом их невесты исчерпывают всё множество $Д_k$ (в нём ровно k девушек). Выбросим из рассмотрения этих юношей и девушек и докажем, что для оставшихся $n-k$ юношей выполнено условие теоремы, и, следовательно, можно воспользоваться предположением индукции, чтобы женить этих $n - k$ юношей.

Рассмотрим произвольную компанию из этих $n - k$, состоящую из r человек. Докажем, что число их подруг (обозначим его s) больше либо равно, чем r. (Это не очевидно, потому как некоторые рёбра дружбы, возможно, вели к тем девушкам, которых мы удалили из рассмотрения.) Вернёмся назад и объединим этих r юношей с группой $Ю_k$. В новой группе окажется $r + k$ юношей. Так как в множестве $Д_k$ содержится все подруги юношей из $Ю_k$ (и, возможно, ещё какие-то подруги r юношей из отобранной компании), то у этих $k + r$ юношей в самом начале было $k + s$ подруг. По исходному условию $k + r \leqslant k + s$. Следовательно, $r \leqslant s$. Значит, в этом случае теорема верна.

Случай 2. Любая группа из k юношей ($1 \leqslant k \leqslant n$) дружит не менее чем с $k + 1$ девушкой.

В этом случае всё просто. Женим любого юношу на любой его подруге. Исключим эту пару из рассмотрения. Докажем, что для оставшихся $n - 1$ юношей выполнено условие теоремы, и, следовательно, можно воспользоваться предположением индукции. Возьмём любую группу из k юношей ($k \leqslant n - 1$). В самом начале у них было не менее $k + 1$ подруг. Даже если невеста выбранного юноши попала сюда, то останется ещё по крайней мере k девушек. Это полностью доказывает теорему.