9 математический класс **12 февраля 2010 года**

Транснеравенство, неравенство Чебышева и неравенство Коши-Буняковского.

Транснеравенство. Если $x_1 \geqslant \dots \geqslant x_n, y_1 \geqslant ... \geqslant y_n u\{i_1, \dots, i_n\} = \{1, ..., n\}$, то

$$x_1y_1 + ... + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + ... + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_n + ... + x_ny_1.$$

Доказательство1. По индукции в лоб. База: $x_1y_1 + x_2y_2 \geqslant x_1y_2 + x_2y_1 \Leftrightarrow x_1(y_1 - y_2) \geqslant x_2(y_1 - y_2)$. Переход: пусть утверждение верно при $n = k$, докажем, что оно верно при $n = k + 1$. Если $y_{i_1} = y_1$, то неравенство сводится к индуктивному предположению. Если $y_{i_1} \neq y_1$, то поменяем их местами, тогда $x_1y_1 + ... + x_ny_n \geqslant x_1y_1 + x_2y_{i_2} + \dots + x_ny_{i_n} \geqslant x_1y_{i_1} + \dots + x_ny_{i_n}$(первое неравенство выполняется по индуктивному предположению, а второе следует из доказанной базы). Доказательство второго неравенства — на дом.

Доказательство2.

Докажем первое из неравенств. Будем вести индукцию по числу инверсий в σ. Если в σ 0 инверсий, то σ — тождественная подстановка, неравенство тривиально. Заметим, что любую нетождественную подстановку σ можно представить в виде $\sigma' \circ \tau$, где τ — транспозиция, а в σ' инверсий меньше, чем в σ. В качестве транспозиции можно взять, например, элементарную транспозицию, убирающую инверсию соседних чисел (в нетождественной подстановке такая всегда есть). Пусть, для определённости, в качестве транспозиции оказалась выбрана τ_{12}. Получаем:

$$x_1y_{\sigma(1)} + x_2y_{\sigma(2)} + \ldots + x_ny_{\sigma(n)} = x_1y_{\sigma'(2)} + x_2y_{\sigma'(1)} + \ldots + x_ny_{\sigma'(n)}.$$

Т.к. теперь $\sigma'(2) > \sigma'(1)$, то $y_{\sigma'(2)} \leqslant y_{\sigma'(1)}$, а $x_1 \geqslant x_2$. Для двух переменных транснеравенство очевидно. Поэтому получим:

$$x_1y_{\sigma'(2)} + x_2y_{\sigma'(1)} + \ldots + x_ny_{\sigma'(n)} \leqslant x_1y_{\sigma'(1)} + x_2y_{\sigma'(2)} + \ldots + x_ny_{\sigma'(n)}.$$

Т.к. в σ' инверсий меньше, индуктивный переход доказан.

Пользуясь этим неравенством, докажем ещё одно крутое неравенство.

Неравенство Чебышёва. Если $x_1 \geqslant ... \geqslant x_n u y_1 \geqslant ... \geqslant y_n$, то

$$\frac{x_1y_1 + ... + x_ny_n}{n} \geqslant \frac{x_1 + ... + x_n}{n}\frac{y_1 + ... + y_n}{n} \geqslant \frac{x_1y_n + ... + x_ny_1}{n}.$$

Замечание. В транснеравенстве и неравенстве Чебышёва не требуется неотрицательность чисел x_i и y_j.

Доказательство. Докажем только первое неравенство. Домножим обе части предполагаемого неравенства на n^2. Запишем все возможные транснеравенства для циклических перестановок данных последовательностей. Они имеют вид: $x_1y_1 + ... + x_ny_n \geqslant x_1y_{i_1} + ... + x_ny_{i_n}$. Сложив эти неравенства почленно, получим, что

$$n(x_1y_1+...+x_ny_n) \geqslant x_1(y_1+\dots+y_n)+x_2(y_1+\dots+y_n)+\dots+x_n(y_1+\dots+y_n) = (x_1+...+x_n)(y_1+...+y_n),$$

что и требовалось доказать.

Пример: докажите, что $\forall x_i \geqslant 0 n \cdot (x_1 + ... + x_n) \geqslant (\sqrt{x_1} + \dots + \sqrt{x_n})^2$
Доказательство. через нер-во Чебышева для $x_i = y_i = \sqrt{x_i}$.

Пример: докажите, что

$$4(a^6 + b^6) \geqslant (a^3 + b^3)(a^2 + b^2)(a + b).$$

Доказательство.

$$4(a^6 + b^6) \geqslant 2(a^3 + b^3)(a^3 + b^3), a2(a^3 + b^3) \geqslant (a^2 + b^2)(a + b).$$

Задача: Докажите, что если $at^2 + 2bt + c \geqslant 0$ для любого t, то $b^2 \leqslant ac$

Неравенство Коши—Буняковского—Шварца. $(x_1y_1 + ... + x_ny_n)^2 \leqslant (x_1^2 + ... + x_n^2)(y_1^2 + ... + y_n^2)$.
Доказательство. Заметим, что сумма квадратов любых чисел неотрицательна. Напишем, что неотрицательна сумма квадратов чисел $z_k = x_k + ty_k$ для любого t:

$$0 \leqslant z_1^2 + \ldots + z_n^2 = (x_1^2 + \ldots + x_n^2) + 2t(x_1y_1 + \ldots + x_ny_n) + t^2(y_1^2 + \ldots + y_n^2).$$

Так как неравенство выполняется для любого действительного t, то дискриминант трёхчлена относительно t, которым является правая часть неравенства, неположителен. Неравенство о неположительности дискриминанта и является нужным нам неравенством Коши-Буняковского.

Вопрос: когда достигается равенство?
Ответ: только при пропорциональных наборах $(x_1/y_1 = x_2/y_2 = \dots = x_n/y_n)$