9 математический класс **16 февраля 2010 года.**

Неравенства – 2. Разбор задач.

1) Докажите, что $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1) \leqslant n^n$.

Решение. Применить Коши к первым n нечётным натуральным числам.

2) Для положительных x и y докажите: $x^2(y^3+x+1)+y^2(x^3+y+1) \leqslant x^4(y+1)+y^4(x+1)+x+y$.

Решение. $x^2y^3+y^2x^3 \leqslant x^4y+xy^4$ по неравенству Мюрхеда. Осталось сравнить $x^3+y^3+x^2+y^2$ и x^4+y^4+x+y. Вычитая из второго выражения первое, получаем: $x(x-1)^2(x+1)+y(y-1)^2(y+1)$.
Тут всё неотрицательно. Отсюда требуемый знак неравенства.

3) Докажите, что для положительных x, y и z верно $(x+y+z)(xy+yz+zx) \leqslant 3(x^3+y^3+z^3)$.

Решение. Слева $3S[(1,1,1)]+6S[(2,1,0)]$, справа $9S[(3,0,0)]$.

4) Докажите, что при $x+y+z=1$ и x, y, $z \geqslant \frac{1}{4}$ верно $\sqrt{4x+1}+\sqrt{4y+1}+\sqrt{4z+1} \leqslant 5$.

Решение. Основано на $\sqrt{4x+1} \leqslant 2x+1$.

5) Найдите наименьшее k такое, что для любых положительных x, y и z верно:

$$xy(x^2+y^2)^2+yz(y^2+z^2)^2+zx(z^2+x^2)^2 \leqslant k(x^6+y^6+z^6).$$

Решение. Слева $6S[(5,1,0)]+6S[(3,3,0)]$. Справа $3kS[(6,0,0)]$. Очевидно, при $k \geqslant 4$ неравенство выполняется. Пусть $k<4$. Подставим $x=y=z=1$. Слева будет 12, а справа $3k$, что меньше 12. Противоречие. Значит, $k=4$.

6) Найдите наибольшее c_n, $n>1$ что для всех положительных $x_1, \dots, x_n$ верно:

$$(x_1^2+x_2^2 \ldots + x_n^2) \geqslant c_n(x_1x_2+x_2x_3+\ldots+x_nx_1).$$

(при $n=2$ справа $c_2(x_1x_2+x_2x_1)$)

Решение. При $n=2$ или $n=3$ при помощи Мюрхеда ($n=2$ — Коши; $n=3$ — о 3х квадратах) получаем $c_2=1$, $c_3=1$.
Докажем, что $c_n=1$ при $n>3$. Домножим всё на 2, вычтем из левой части правую и, перегруппировав, получим $(x_1-x_2)^2+(x_2-x_3)^2+\ldots+(x_n-x_1)^2$. Это, очевидно, неотрицательно.
Минимальность всюду доказывается подстановкой $x_1=\ldots=x_n=1$.

7) Докажите, что для положительных a_1, a_2, …, a_k верно:

$$\frac{a_1^n+a_2^n+\dots+a_k^n}{k} \geqslant \left(\frac{a_1+a_2+\dots+a_k}{k}\right)^n.$$

Решение. Ветвящаяся индукция по k.

8) Для положительных чисел a, b и c таких, что $abc=1$, докажите: $\frac{1}{1+a+b}+\frac{1}{1+b+c}+\frac{1}{1+c+a} \leqslant 1$.

Решение. Домножим всё на знаменатели. Получится:

$$3+4(a+b+c)+3(ab+bc+ac)+a^2+b^2+c^2 \leqslant$$

$$\leqslant 1+3(a+b+c)+3(ab+bc+ac)+a^2+b^2+c^2+2abc+a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+cb^2.$$

Убирая всё лишнее (и заменяя $2abc$ справа на 2), приходим к:
$a+b+c \leqslant a^2b+ab^2+a^2c+ac^2+b^2c+c^2b$.
Заменяем c на $\frac{1}{ab}$, после чего домножаем всё на $(ab)^2$:

$$a^3b^2+a^2b^3+ab \leqslant a^4b^3+a^3b^4+a^3b+a+ab^3+b.$$

Неравенство очевидно в двух случаях: 1) $a \geqslant 1$, $b \geqslant 1$; 2) $a \leqslant 1$, $b \leqslant 1$.
Рассмотрим оставшийся случай: $a \geqslant 1$, $b<1$ (симметричный случай рассматривается аналогично). При таких ограничениях $a^3b^2<a^3b$, $a^2b^3 \leqslant a^4b^3$. Оказывается, что и $ab<a+b$. Действительно, $ab<a$, а $a+b>a$.