Разные задачи. Список №5. Срок сдачи до 28 февраля.

1) Целые числа m, n и k подобраны так, что $k^2 - n^2 - m^2 = 2(m-n)(k-m+n)$. Докажите, что $\sqrt{2nm}$ — целое число.

Решение. Раскрыв скобки, получим $k^2 - n^2 - m^2 = 2mk - 2nk - 2m^2 + 2mn + 2mn - 2n^2$. Отсюда $k^2 + n^2 + m^2 - 2mk - 2mn + 2nk = 2mn$, а тогда $(k+n-m)^2 = 2mn$, что и требуется.

2) В лесу живут волки, зайцы и комары. Некоторые из них всегда говорят правду, прочие всегда врут. Каждого спросили: 1) "Ты волк?" (60% утвердительных ответов), 2) "Ты заяц?" (40% утвердительных ответов), 3) "Ты комар?" (30% утвердительных ответов). Сколько процентов лгунов в лесу?

Ответ: 30%. Решение. Каждый лжец дал два утвердительных ответа, а каждый правдец — один. Всего ответов "да" было 130%, это все по разу и ещё все лгуны. То есть лгунов 30%.

3) AA_1 и CC_1 — высоты остроугольного треугольника ABC. Точки G и F на AC выбраны так, что $C_1F||BC$ и $A_1G||AB$. Докажите, что A_1, C_1, G и F лежат на одной окружности.

Решение. Имеем: $\angle AGC = \angle BAC = \angle C_1A_1B = \angle A_1C_1F$. Это решает задачу.

4) Докажите для всех $0 \leqslant x, y \leqslant 1$ неравенство $\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}$.

Решение. Пусть $x \leqslant y$. Тогда $\frac{x}{\sqrt{2y^2+3}} + \frac{y}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{x}{\sqrt{2x^2+3}} + \frac{1}{\sqrt{2x^2+3}} = \frac{x+1}{\sqrt{2x^2+3}}$. Осталось показать, что $\frac{x+1}{\sqrt{2x^2+3}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{5}}$. Возведение в квадрат и очевидные преобразования сводят это неравенство к $3x^2 - 10x + 7 \geqslant 0$, которое совпадает с $(3x-7)(x-1) \geqslant 0$ и верно при любом $0 \leqslant x \leqslant 1$.

5) Два пятизначных числа приписали одно к другому. Оказалось, что получившееся десятизначное число делится на произведение исходных пятизначных чисел. Найдите исходные числа.

Ответ 16667 и 33334 Решение. Пусть x и y — эти числа. Тогда $x \cdot 100000 + y = kxy$. Отсюда $y = mx$ и $x \cdot 100000 + mx = kmx^2$, то есть $\cdot 100000 + m = kmx$. Теперь ясно, что m делит 100000, при этом $m < 10$ как отношение двух пятизначных чисел. Ясно, что $m \in \{1, 2, 4, 5, 8\}$. При $m = 1$ x делит 100001, но тогда частное должно быть меньше 10, а однозначных делителей у 100001 нет. При $m = 2$ x делит 50001, само число 50001 не подходит, зато 50001 кратно трём, что порождает решение $x = 16667$, $y = 33334$. Другие варианты разбираются аналогично и новых решений не дают.

6) На стороне BC ромба $ABCD$ удалось выбрать точку E так, что $AE = CD$. Описанная окружность треугольника AEB пересекает отрезок ED в точке F. Докажите, что A, F и C лежат на одной прямой.

Решение. Ясно, что $ADCE$ — равнобедренная трапеция. Пусть F — точка пересечения её диагоналей. Фактически нужно показать, что $KABE$ вписан. Это следует из $\angle CEK = \angle ECK = \angle BAC$. Первое равенство — свойство равнобедренной трапеции, второе — равнобедренного треугольника.

7) Пятеро сыграли круговой турнир по шахматам. Андрей выиграл ровно дважды, Боря играл только вничью, Вася проиграл только занявшему последнее место, Гена набрал на пол-очка больше, чем Дима. Сколько у кого очков?

У всех в сумме 10 очков. У проигравшего менее 2 очков, при этом он как минимум выиграл у Васи и сыграл вничью с Борей. Значит у проигравшего полтора очка. Это не Боря (у него 2 очка, не Андрей (у него не менее $2,5$), не Вася и не Гена. Это Дима. То есть, у Димы $1,5$ очка. Дима проиграл Гене и Андрею. Андрей выиграл также и у Гены, ибо у Васи он выиграть не мог. Стало быть, Гена имеет $1,5$ очка плюс то, что он получил в игре с Васей. Так как у Гены на пол-очка больше, чем у Димы, то с Васей Гена сыграл вничью. Чтобы Вася не был проигравшим, у него должно быть ещё очков игре с Андреем. Итак, у Димы $1,5$ очка, у Андрея $2,5$ очка, у остальных по 2 очка.

8) На плоскости нарисован квадрат. Миша измерил расстояния от некоторой точки плоскости до его вершин и получил 1 км, 4 км, 7 км, 8 км. Докажите, что он ошибся.

Первое решение. Пусть x — сторона квадрата, M — данная точка, $MA = 1$, $MB = 4$, $MC = 7$, $MD = 8$ (точки A, B, C, D — вершины квадрата в каком-то порядке). Тогда по неравенству треугольника $AB \leqslant 1 + 4 = 5$, но $x \leqslant AB$, то есть $x \leqslant 5$. С другой стороны либо AC, либо AD является стороной квадрата, а тогда $x + 1 \geqslant 8$ или $x + 1 \geqslant 7$. В любом случае это неравенство невыполнимо при $x \leqslant 5$.

Второе решение (Влад Генкин). Докажем следующее свойство любого прямоугольника $ABCD$: для любой точки M плоскости (и даже простанства) $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$. Понятно, что мгновенно устанавливается перебором, что для чисел из условия подобное соотношение не выполнено. Доказательство леммы основано на принципе Карно: $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$ следует из $MA^2 - MB^2 = MD^2 - MC^2$. По принципу Карно это заменяется равенством $M_1A^2 - M_1B^2 = M_2D^2 - M_2C^2$, где M_1 и M_2 суть проекции M на прямые AB и CD. Теперь равенство доказано, поскольку $M_1A = M_2D$ и $M_1B = M_2C$.

9) В графе нет изолированных вершин. Докажите, что вершины можно покрасить в два цвета так, что каждая вершина соединена с какой-то вершиной другого цвета.

Решение. Покрасим любую вершину в красный цвет, все, смежные с ней, — в синий, все смежные с синими (и ещё не покрашенные) — снова в красный и т.д. Так покрасим все верщины в каждой компоненте связности графа.

10) Произведение различных простых чисел делится на каждое из них, уменьшенное на единицу. Найдите все такие произведения.

Ответ: 2, 6, 42, 1806. Решение. Назовём требуемые числа "хорошими". Пусть $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_n$ — хорошее число (простые множители идут по возрастанию). Тогда и $p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{n-1}$, очевидно, хорошее, поскольку в делимости на $p_i - 1$ ($1 \leqslant i \leqslant n-1$) простое число p_n всё равно не поможет. Тогда все хорошие числа получаются постепенным дописыванием к минимальному (двойке) простых множителей. Так получаются 2, $2 \cdot 3$, $2 \cdot 3 \cdot 7$. Кандидатами в следующее простое число служат $2 \cdot 7 + 1 = 15$ и $2 \cdot 3 \cdot 7 + 1 = 43$, из которых простым является только второе. Так получается последний ответ. Кандидатами в следующее простое число являются $2 \cdot 3 \cdot 43 + 1 = 259$, $2 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 603$ и $2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 43 + 1 = 1807$. К счастью, простых чисел среди них нет.

11) 10 школьников писало контрольную по геометрии. В это время Татьяна Юрьевна тихонько их фотографировала. Потом она сказала, что в каждый кадр попало ровно два школьника, никакие двое не были сфотографированы дважды и для любой группы из четырёх школьников нашлось ровно три фотографии, где были изображены члены только этой группы. Не ошиблась ли Татьяна Юрьевна?

Решение. Будем рассматривать граф, вершины которого — школьники, рёбра соединяют тех, кто попал на одно из фото. Ясно, что в графе нет треугольников — иначе бы этот треугольник бы ни с кем не соединялся, и, рассматривая одну из его вершин и три другие, мы бы установили, что все остальные 7 вершин представляют собой полный граф, что невозможно. Также нет вершины степени 4 и более, иначе среди четырёх её соседей была бы вершина, соединённая с двумя — они трое вместе с вершиной степени 4 давали бы запрещённую четвёрку. Теперь рассмотрим 4 вершины. Либо одна из них степени 3, либо они соединены цепью. Объединяя три из этих четырёх с пятой вершиной, мы получим, что пятая должна быть соединена с двумя из четырёх, а это, как легко понять, невозможно.

12) Бумажный квадрат разделён линиями, параллельными сторонам, на N прямоугольников. Докажите, что можно провести не более $N-1$ прямолинейных разрезов так, что квадрат распадётся на упомянутые прямоугольники. Разрез не обязан начинаться или кончаться на краю. Части квадрата перекладывать нельзя.

Решение. Рассмотрим все максимальные отрезки разбиения. Каждый их конец — вершина ровно двух прямоугольников. Всего у прямоугольников $4N$ вершин, 4 вершины — углы квадрата. остальные $4N-4$ вершины совпадают с концами не более чем $N-1$ отрезка.

13) Две окружности пересекаются в точках A и B. В точке A к каждой из них провели по касательной, а потом в каждой окружности провели по диаметру так, что каждый диаметр параллелен касательной к другой окружности. Докажите, что концы диаметров лежат на одной окружности.

Решение. Рассмотрим треугольник O_1O_2W, где O_1 и O_2 — центры окружностей, а W — точка пересечения продолжений диаметров. Тогда $O_1A \perp O_2W$ и $O_2A \perp O_1W$, то есть A — ортоцентр треугольника O_1O_2W. Тогда $WA \perp O_1O_2$, то есть W лежит на AB. Это значит, что степень W относительно обеих окружностей одинакова, то есть для каждого из двух диаметров произведение расстояний от W до его концов одно и то же, а это и означает наличие окружности, о которой идёт речь в задаче.

14) Дан многочлен $x^3 + ax^2 + 17x + 3b$, где a и b — целые. Известно, что у него три целых корня. Докажите, что все они различны (то есть, нет кратных корней).

Решение. Если p — кратный корень (кратности не менее 2), а q — оставшийся корень, то по теореме Виета $17 = p^2 + 2pq$. Отсюда $(p;\, q) \in \{(1;\, 8),\, (-1;\, -8),\, (17;\, -8),\, (-17;\, 8)\}$. С другой стороны, $p^2q = -3b$ по той же теореме Виета, но ни в каком варианте P^2q не кратно трём.

15) Докажите, что если возможно разбить клетчатый прямоугольник на трёхклеточные уголки, то число способов сделать это чётно.

Решение. Индукция по площади прямоугольника. База для площади 6 очевидна. Пусть для всех прямоугольников площади, меньшей N, доказано. Рассмотрим прямоугольник площади N. Проведём прямую a — серединный перпендикуляр к одной из сторон. Все способы разбиения поделим на симметричные относительно a и несимметричные. Несимметричные объединяются в пары (разбиению ставится в соответствие его отражение относительно a), а симметричных чётное число, потому что каждое симметричное соответствует разбиению одной из половин прямоугольника, а на ней число способов чётно по предположению индукции.