Неравенства – 1. Упражнения.

Напомним, что для неотрицательных чисел выполнены неравенства о средних:

$$\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}} \leqslant \sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

(слева направо: *среднее гармоническое, среднее геометрическое, среднее арифметическое, среднее квадратичное*).

При $a = b$ и только при этом условии будет наблюдаться равенство (во всех неравенствах цепочки).

Напомним также, что неравенство о средних обобщается на любое число неотрицательных переменных (*неравенство Коши*):

$$\frac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$$

В равенство это обращается только при совпадении всех переменных.

Для натуральных n и любого $x > -1$ верно *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

Если не сказано иное, все переменные считаются неотрицательными.

1) Докажите общее неравенство о среднем геометрическом и среднем гармоническом: $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdot \cdots \cdot a_n}$.

2) Докажите что $(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2$.

3) Докажите, что если a, b, c — стороны треугольника, то $\frac{1}{b+c-a}+\frac{1}{b+a-c}+\frac{1}{a+c-b} \geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

4) Сумма всевозможных попарных произведений четырёх положительных чисел равна 24. Какое наибольшее значение может принимать произведение этих чисел?

5) Сумма всевозможных попарных произведений четырёх положительных чисел равна 24. Какое наименьшее значение может принимать сумма этих чисел

6) Положительные числа p и q таковы, что $p+q=1$. Какое минимальное значение принимает выражение $\left(p+\frac{1}{p}\right)^2+\left(q+\frac{1}{q}\right)^2$?

7) Докажите, что для любого натурального n верно: $\sqrt[n]{n!} < \frac{n+1}{2}$.

8) Докажите, что для $b > 0$ и любого натурального n верно $\left(\frac{1+bn}{1+n}\right)^{n+1} \geqslant b^n$.

9) (Олимпиада ГДР, 1967 год.) t_1, t_2, …, t_n — положительные числа, S — их сумма. Докажите, что $\frac{t_1}{S-t_1}+\frac{t_2}{S-t_2}+\cdots+\frac{t_n}{S-t_n} \geqslant \frac{n}{n-1}$.