9 математический класс **16 октября 2009 года.**

Математическое ожидание. Разбор задач (с решениями).

1) В казино предлагают сыграть в игру: игрок ставит некоторую сумму на число от 1 до 6, а потом бросает три кости. Если загаданное число не выпадает ни разу, то его ставка сгорает. Если выпадает — ставку возвращают, и казино платит дополнительно поставленную сумму столько раз, сколько число выпало. Справедлива ли игра?

Нет. Средний выигрыш игрока при ставке 1 равен $-\frac{125}{216}+\frac{3\cdot 1}{216}+\frac{2\cdot 3\cdot 5}{216}+\frac{1\cdot 3\cdot 25}{216}=-\frac{17}{216}$. Иными словами, с каждого поставленного доллара казино имеет примерно 8 центов. На эти доходы оно и существует. 8% — достаточно большой проигрыш. При бо́льших значениях игра будет непривлекательна для посетителей казино.

2) Монетку бросают до первого выпадения орла. Какое в среднем количество бросков нужно сделать?

2 броска. Решение сводится к подсчету $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{k}{2^k}$. Данная сумма будет равна $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\sum\limits_{k=3}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\ldots$, что есть $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\frac{1}{4}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}+\ldots$, а это равно $\left(\sum\limits_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}\right)\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots\right)=2$

3) Монетку бросают n раз. Найдите матожидание количества орлов.

Ответ: $\frac{n}{2}$.

<u>Первое решение:</u> В самом деле, это матожидание равно $E=\frac{1}{2^n}\left(n\cdot C_n^n+(n-1)\cdot C_n^{n-1}+(n-2)\cdot C_n^{n-2}+\cdots+1\cdot C_n^1+0\cdot C_n^0\right)$. В точности такая же сумма получится, если все C_n^k заменить на C_n^{n-k}: $E=\frac{1}{2^n}\left(n\cdot C_n^0+(n-1)\cdot C_n^1+(n-2)\cdot C_n^2+\cdots+1\cdot C_n^{n-1}+0\cdot C_n^n\right)$. Если теперь оба равенства сложить, получим $2E=\frac{n}{2^n}\left(C_n^0+C_n^1+C_n^2+\cdots+C_n^n\right)=n$, откуда $E=\frac{n}{2}$.

<u>Второе решение:</u> Матожидания количества орлов и решек одинаковы, а количество выпавших монет (n) равно сумме количества выпавших орлов и количества выпавших решек. Отсюда ясен ответ.

<u>Третье решение:</u> Рассмотрим величину A_k. Она равна 1, если k-я монета выпала орлом, и 0 в противном случае. Ясно, что количество орлов — это сумма $A_1+A_2+\cdots+A_n$. Но матожидание суммы равно сумме матожиданий, а $E(A_k)=\frac{1}{2}$ при любом k, так что ответ моментально получается.

4) Солдат срочной службы написал письма n своим любимым девушкам, надписал n конвертов с адресами и случайным образом разложил письма по конвертам. Сколько девушек в среднем получат адресованное себе письмо?

Одна. Снова рассмотрим величину A_k. Она равна 1, если k-я девушка получила адресованное себе письмо, и 0 в противном случае. Понятно, что $E(A_k)=\frac{1}{n}$ при любом k, так что ответ $E=\sum\limits_{k=1}^{n}E(A_k)=n\cdot\frac{1}{n}=1$. Обратим внимание на тонкость: величины A_k в третьем решении предыдущей задачи, конечно, независимы, а в этой задаче — нет. Но теорема о сумме матожиданий работает всегда!

5) По узкой дороге в одном направлении едут n машин. Вначале скорости всех машин различны, а порядок машин на шоссе случаен. Каждая машина едет с постоянной скоростью, пока не догонит едущую впереди, после чего едет со скоростью передней машины. В результате через достаточно большое время машины разбиваются на несколько групп. Найдите среднее значение числа групп.

Ответ: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$.

Первую машину в группе назовём головной. Количество групп — это количество головных машин. k-я машина будет головной, если её скорость меньше, чем у машин впереди, вероятность этого события равна $\frac{1}{k}$. Снова применим тот же приём: пусть $A_k=1$, если k-я машина головная, $A_k=0$ в противном случае. Количество головных машин есть $\sum\limits_{k=1}^{n}A_k$, применение формулы для суммы средних значений приводит к ответу.

Можно доказать, что при большом количестве машин получится в среднем $(\ln n+\gamma)$ групп, где $\gamma\approx 0,577$ — постоянная Эйлера-Маскерони.