Математическое ожидание случайной величины.

Справедливая игра. Помимо игр, подобных шахматам, в которых результат зависит исключительно от умения игроков, популярны и такие, которые содержат элемент случайности — игроки кидают кости, сдают карты и проч. Как правило, в таких играх помимо ставки на везение есть и пространство для самостоятельных действий игрока. Мы же для простоты рассмотрим игры, в которых игроки не принимают самостоятельных решений, а исключительно "испытывают судьбу".

В таких играх нельзя говорить об умении играть, но можно оценивать вероятность выигрыша. На интуитивном уровне довольно очевидно, что такое *справедливая игра* — когда у обоих равные шансы на успех. Например, если двое кидают монету и первый выигрывает, если выпал орел, а второй, если выпала решка, то игра справедливая при условии, что монета "честная". Если же монета кривая, то понятно, что игра несправедливая.

Или, например, если монету кидают дважды, и один выигрывает в случае дубля, а иначе выигрывает второй. Тогда вероятность победы каждого равна $\frac{1}{2}$, всё честно. Если же в игре в две монеты первый выигрывает только в случае выпадения двух орлов, то игра становится интуитивно несправедливой. Зато мы можем сделать эту игру справедливой, если положим, что первый в случае выигрыша получает от второго n рублей, а второй от первого k рублей мы подберём n и k так, чтобы игра была интуитивно честной. Для этого, учитывая, что первый побеждает с вероятностью $\frac{1}{4}$, а второй с вероятностью $\frac{3}{4}$, потребуем, чтобы $n = 3k$. При этом первый в среднем ничего не выигрывает и не теряет: получает $3k$ с вероятностью $\frac{1}{4}$ и теряет k с вероятностью $\frac{3}{4}$. Его средний выигрыш нулевой, что означает, что игроки, играющие долгое время в такую игру останутся приблизительно "при своих"?

Другой пример: В мешке лежат красные и синие шарики. Первых x штук, вторых y штук. Кто-то тащит шарик, если он синий выигрывает первый, если красный второй. Игра очевидно несправедлива. Но если ввести денежный фактор, т.е. первый получает за свой выигрыш a монет от второго, а второй b монет от первого за свой, то в среднем первый выиграет $\frac{ax}{x+y} - \frac{by}{x+y}$. Для справедливости нужно, чтобы $ax = by$. То есть, если шаров x и y, то за выигрыш первый второму платит y, а второй первому x.

Плата за игру. Мы играем в кости с казино и получаем столько рублей, сколько очков выпало. Сколько мы готовы заплатить за такую игру? Этот вопрос похож на ситуацию с предыдущими играми. Если мы за игру платим a рублей, то в случае выпадения на кубике, скажем, четвёрки, получаем $4 - a$ рублей. Сколько мы в среднем получим от такой игры? С вероятностью $\frac{1}{6}$ получаем $x - a$, где x от 1 до 6. В среднем это выходит $\frac{1}{6}(1 - a + 2 - a + 3 - a + 4 - a + 5 - a + 6 - a) = \frac{7}{2} - a$. То есть в среднем, чтобы игра была справедливой нужно заплатить три с половиной рубля. Но мы, естественно, готовы заплатить и меньше.

Математическое ожидание. Это попытка формализовать понятие среднего. Пусть некоторая величина принимает различные значения в зависимости от исхода эксперимента. Она в этом случае называется *случайной величиной.* Так, случайной величиной является количество очков на кубике, счёт в футбольном матче или явка избирателей на выборах. Допустим, что случайная величина X принимает k значений: $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_k$, причём значение x_i принимает с вероятностью p_i. Набор значений и соответствующих им вероятностей называется *распределением случайной величины.* Разумеется, $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = 1$. Тогда число $E(X) = x_1p_1 + x_2p_2 + \cdots + x_kp_k$ назовём *математическим ожиданием* или *средним значением* случайной величины X (E — от англ. "expectation" — "ожидание").

Примеры. Выигрыш одного из игроков в игре на деньги является случайной величиной. В игре с двумя монетками матожидание выигрыша первого равно $\frac{1}{4}n - \frac{3}{4}k$. В игре с шариками оно равно $\frac{ax}{x+y} - \frac{by}{x+y}$. И в том и в другом случае для справедливости игры мы требуем чтобы математическое ожидание выигрыша было равно нулю для каждого из игроков. Понятно, что $\frac{7}{2}$ — математическое ожидание числа очков на кинутом кубике, или, иначе говоря, среднее выпавшее число очков.

Мы имеем дело с числовыми случайными величинами. С ними можно делать различные математические операции: умножать на число, складывать между собой, перемножать, и так далее. Как при этом ведёт себя математическое ожидание? Бросим монету, случайной величиной G будет количество выпавших орлов. Вот распределение:

Значения G	0	1
Вероятности	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$

Теперь бросим две монеты и посчитаем сумму S и произведение P количества выпавших орлов. Соответствующие распределения будут такими:

Значения S	0	1	2
Вероятности	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$

Значения P	0	1
Вероятности	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$

Нетрудно посчитать матожидания: $E(G) = 0 \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$, $E(S) = 0 \cdot \frac{1}{4} + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$, $E(P) = 0 \cdot \frac{3}{4} + 1 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$. Поскольку $S = G + G$ и $P = G \cdot G$, логично ожидать, что $E(S) = E(G) + E(G)$ и $E(P) = E(G) \cdot E(G)$. Так оно и есть. Хотя и не совсем так.

Свойства математического ожидания. С суммой всё хорошо, среднее значение суммы двух величин действительно равно сумме средних значений каждой. Докажем это. Пусть есть две случайные величины, A и B:

Значения A	a_1	a_2	...	a_n
Вероятности	p_1	p_2	...	p_n

Значения B	b_1	b_2	...	b_m
Вероятности	q_1	q_2	...	q_m

Что такое среднее значение их суммы $E(A+B)$? Это сумма слагаемых вида $(a_i + b_j)P_{ij}$ по всем i от 1 до n и всем j от 1 до m. А что такое P_{ij}? Это вероятность такого события, что A приняла значение a_i, а в это время B приняла значение b_j. Для независимых величин $P_{ij} = p_i q_j$, а вообще это не обязательно так. Но в любом случае можно в сумме раскрыть скобки и сгруппировать все члены, содержащие a_i: $a_i\left(P_{i1} + P_{i2} + P_{i3} + \cdots + P_{im}\right)$. Вероятность в скобках — это вероятность того, что тем временем как величина A приняла значение a_i, величина B примет хоть какое-нибудь значение. Вероятность этого, конечно, равна p_i, и при всех a_i после приведения подобных получится коэффициент p_i. Ну а при b_j, аналогично, q_j. Тем самым, получится сумма двух сумм: $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i p_i$ и $\sum\limits_{j=1}^{m} b_j q_j$, то есть $E(A) + E(B)$, что и требовалось.

С произведением такой трюк не получится. Попытавшись просуммировать числа вида $a_i b_j P_{ij}$, мы ничего разумного не получим. Но для независимых величин, как мы знаем, $P_{ij} = p_i q_j$. В этом случае можно сгруппировать все члены с a_i и вынести $a_i p_i$ за скобку. Получится $a_i p_i(b_1 q_1 + b_2 q_2 + \cdots + b_m q_m) = a_i p_i E(B)$. А теперь можно вынести $E(B)$ и окончательно получить $(a_1 p_1 + a_2 p_2 + \cdots + a_n p_n)E(B) = E(A)E(B)$.

Итак, $E(A+B) = E(A) + E(B)$ для любых, а $E(AB) = E(A)E(B)$ для независимых случайных величин A и B.

Вместо того, чтобы кидать кубик, можно, например, крутить волчок, разбитый на 6 равных секторов с надписями 1, 2, ..., 6, подобный тому, который используется для игры "Что? Где? Когда?". Вероятность выпадения каждого сектора равна $\frac{1}{6}$, а среднее выпавшее значение $\frac{7}{2}$. Если мы крутим два независимых волчка, то среднее значение произведения выпавших очков равно $\frac{7}{2} \cdot \frac{7}{2} = \frac{49}{4}$. Но если волчки связаны тайной системой шестерёнок, например, так, что на одном выпалает всегда то же, что и на втором, то произведение очков будет равно 1, 4, 9, 16, 25 или 36 — каждый вариант с вероятностью $\frac{1}{6}$. В итоге среднее значение будет равно $\frac{1+4+9+16+25+36}{6} = \frac{91}{6}$, а вовсе не $\frac{49}{4}$.