9 математический класс **2 октября 2009 года.**

Избранные задачи зачёта (с решениями).

1) Фирма нарушает закон с вероятностью $0,25$. Аудитор при проверке обнаруживает нарушение с вероятностью $0,75$. В этот раз аудитор нарушений не нашёл. Какова вероятность того, что они всё-таки есть?

Вероятность, что аудитор не найдёт нарушений, равна сумме $\frac{1}{16}$ (это вероятность того, что нарушения есть, но аудитор их прощёлкал) и $\frac{3}{4}$ (вероятность того, что фирма честная). Ответ равен отношению первого слагаемого этой суммы ко всей сумме, то есть $\frac{1}{13}$.

2) Известно, что $\varphi(12) = 4$. 4 — это маленькое число, треть от 12. Бывает ли, что функция Эйлера какого-то числа составляет меньше его четверти?

Бывает, бывает. Например, $\varphi(210) = 48$. На самом деле, функция Эйлера может составлять сколь угодно малую часть числа.

3) Врачи Веня, Сеня и Женя обследуют призывника, принимая решение, годен ли он в армию. Веня и Сеня добросовестно работают и принимают верное решение с вероятностью $p > \frac{1}{2}$. Женя же на юношу не смотрит, а решение принимает, кидая тайком монетку. Потом вопрос о годности три врача решают большинством голосов. Какова вероятность, что такая комиссия примет справедливое решение?

p, как ни смешно. Верное решение будет принято, если двое или трое его примут. Это сделают добросовестные врачи с вероятностью p^2 (при этом неважно, что скажет Женя), а если ровно один из них ошибётся, его в половине случаев подстрахует халтурщик $(2p(1-p) \cdot \frac{1}{2})$. итого $p^2 + p(1-p) = p$. Подобная же система используется в технологии автоматического исправления ошибок при передаче информации.

4) Докажите, что $\left(43^8 - 1\right) \vdots 240$.

Поскольку $8 = \varphi(15) = \varphi(16)$, то $43^8 - 1$ кратно и 15, и 16, а тогда и их произведению.

5) Ответ на вопрос по истории случайно выбранного ученика совпадает с Диминым ответом с вероятностью $\frac{1}{2}$. С какой вероятностью мнение случайно выбранного ученика совпадает с мнением Леонида Александровича? (Вопрос типа "да" – "нет".)

Ответ $\frac{1}{2}$. Например, можно предположить, что Дима – это и есть Л. А. :)). Если серьёзно, то всё считается и не зависит от степени совпадения взглядов Димы и Л. А.

6) На Руси было когда-то распространено следующее гадание: девушка, на которую гадали, зажимала в кулак шесть травинок, так что их концы торчали вверх и вниз, а её подруга попарно связывала концы, торчащие вверх, а затем попарно связывала концы, торчащие вниз. После этого первая девушка разжимала кулак. Если травинки образовывали кольцо, то это значило, что девушка выйдет в этом году замуж. Какова вероятность успешного гадания?"

Ответ $\frac{8}{15}$. Верхние концы свяжем как попало. Связать одну пару снизу есть $C_6^2 = 15$ вариантов. Три нам не подходят, то есть вероятность пока что равна $\frac{12}{15} = \frac{4}{5}$. Второй удачный ход можно сделать четырьмя из $C_4^2 = 6$ вариантов. Итого, $\frac{4}{5} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$.

7) Известно, что для простого числа k число $(k-1)!$ даёт остаток -1 при делении на k. Это называется теоремой Вильсона. А для составного число k — какой остаток даёт $(k-1)!$ при делении на k?

Для $k = 4$ двойку, для прочих 0. В самом деле, если число не является квадратом простого, то оно раскладывается в произведение двух различных меньших его чисел. Именно, если $k \vdots p$, будет $k = p \cdot \frac{n}{p}$. Оба множителя будут перемножаться при вычислении $(k-1)!$. Для $k = p^2$, $p > 2$, в $(k-1)!$ войдут p и $2p$, что тоже обеспечит делимость $(k-1)!$ на k.

8) Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Докажите, что число карточек, на которых написано произвольное натуральное число k, равно $\varphi(k)$.

Индукция по k с применением теоремы о сумме функции Эйлера по всем делителям. Можно усложнить задачу, дав более слабое утверждение (так и было на Мосгоре): доказать, что каждое натуральное число где-то написано.

9) Двое бросают монету: один бросил ее 10 раз, другой — 11 раз. Чему равна вероятность того, что у второго монета упала орлом большее число раз, чем у первого?

Ответ $\frac{1}{2}$. Пусть оба бросили монету по 10 раз. Тогда с вероятностью p у первого больше орлов, с такой же вероятностью их больше у второго и с вероятностью q у них орлов поровну. При этом $2p + q = 1$. Теперь второй снова кидает монету. Если у него было больше орлов, больше и останется, если меньше, то больше не станет, а если поровну, то станет больше в половине случаев. То есть, вероятность того, что орлов будет больше, равна $\frac{1}{2}q + p = \frac{1}{2}$.