

## Зачёт №1. Программа.

- 1) **Малая теорема Ферма.** Если  $p$  простое и  $a \not\equiv 0 \pmod{p}$ , то  $(a^{p-1} - 1) \equiv 0 \pmod{p}$ .
- 2) **Деление остатков.** Среди ненулевых остатков, взаимно-простых с модулем, возможно и однозначно определено деление.
- 3) **Теорема Вильсона.** Для простого  $p$  число  $(p - 1)! + 1$  делится на  $p$ .
- 4) **Функция Эйлера.** Определение, непосредственное вычисление для простого числа, произведения двух простых чисел, степени простого числа.
- 5) **Мультипликативность функции Эйлера.** Свойство  $\varphi(ab) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$  для взаимно-простых  $a$  и  $b$  и общая формула  $\varphi(m) = m(1 - \frac{1}{p_1})(1 - \frac{1}{p_2})\dots(1 - \frac{1}{p_k})$ .
- 6) **Теорема Ферма-Эйлера.** Если  $\text{НОД}(a, n) = 1$ , то  $(a^{\varphi(n)} - 1) \equiv 0 \pmod{n}$ .
- 7) **Чудесное число.** Для любого  $n$  существует число с суммой цифр  $n$  и делящееся на  $n$ .
- 8) **Сумма по всем делителям.** Любое натуральное число равно сумме значений функции Эйлера для всех его делителей.
- 9) **RSA.** Система шифрования RSA.
- 10) **Вероятность.** Вероятностное пространство, эксперимент, исходы, событие, вероятность события. Априорные вероятности. Сложение вероятностей, совместные и несовместные события.
- 11) **Условная вероятность.** Перемножение вероятностей, независимые и зависимые события, условная вероятность, формула Байеса.
- 12) **"Поле чудес".** У Миши есть три коробки. В одну он положил 100 рублей, в остальных пусто. Люба выбирает одну из коробок. Затем Миша берет ту из двух оставшихся коробок, где ничего не лежит, и открывает ее. После этого Люба может открыть либо коробку, которую она выбрала сразу, либо вместо нее открыть третью коробку. Если в открытой коробке окажутся 100 рублей, они достанутся Любе. Какую коробку следует Любе открыть? Почему?
- 13) **Задача о дуэли.** Печорин и Грушницкий стреляются на дуэли "до первой крови", то есть до попадания в соперника. Печорин поражает соперника с вероятностью 0,7, Грушницкий — с вероятностью 0,4. Право первого выстрела устанавливается бросанием монеты. Какова вероятность победы каждого из дуэлянтов?
- 14) **Задача о разделе ставки.** Атос и Портос в кабаке играли в какую-то карточную игру. Игра идёт несколько конов, каждый кон кто-то получает очко. Каждый поставил по 4 пистоля, играть уговорились до шести очков. Победитель должен был забрать все 8 пистолей. Когда они сыграли 8 конов и Портос вёл в счёте 5 : 3, неожиданно в трактир влетели гвардейцы кардинала. Началась, понятно, драка, и к игре мушкетёры уже не вернулись. Когда вспомнили о деньгах и игре, Портос сказал: "Я вёл в счёте 5 : 3, не так ли, сударь? Значит, 5 пистолей из поставленных восьми мои, три — Ваши". "Погодите, — ответил Атос. — Ведь мы с Вами, право же, играем одинаково хорошо. И если уж Вы ввели в счёте 5 : 3, то Вам по справедливости положено..."  
Как предложил поделить деньги Атос?