Применение гомотетии для доказательства теорем

1. Докажите, что точки, симметричные произвольной точке относительно середин сторон квадрата, являются вершинами некоторого квадрата.

2. На каждом из оснований AD и BC трапеции $ABCD$ построены вне трапеции равносторонние треугольники. Докажите, что отрезок, соединяющий третьи вершины этих треугольников, проходит через точку пересечения диагоналей трапеции.

3. а) Отметим на окружности ω_1 точку А Пусть при гомотетии с центром в точке А. окружность ω_1 переходит в окружность ω_2 . Каково взаимное расположение ω_1 и ω_2 ?
   б) Прямая, параллельная стороне AB треугольника ABC, отсекает от него треугольник MNC. Докажите, что окружности, описанные около треугольников ABC и MNC, касаются.

Прямая Эйлера. *В любом треугольнике центр масс M лежит между ортоцентром H и центром описанной окружности O, причем OM : MH = 1:2.*

4. Докажите теорему о прямой Эйлера, рассмотрев гомотетию с центром в точке M.

5. Докажите, что середина отрезка OH (точки O и H те же) является центром описанной окружности треугольника $A_1B_1C_1$, где A_1, B_1, C_1 –середины сторон треугольника ABC.

Напоминание 1 *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно его сторон, принадлежат описанной окружности этого треугольника.*

Напоминание *Точки, симметричные ортоцентру треугольника относительно середин его сторон, принадлежат описанной окружности этого треугольника.*

Окружность девяти точек (она же Эйлера, она же Фейербаха) *Середины сторон треугольника, основания высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр с вершинами, лежат на одной окружности.*

6. Докажите, что в любом треугольнике имеет место неравенство: $\boldsymbol{R \geq 2r}$ (R и r — радиусы описанной и вписанной окружностей), причем равенство $R = 2r$ имеет место только для правильного треугольника.

Домашнее задание

7. Из двух точек прямой проведены по две касательные к окружности. В образованные углы с вершинами в этих точках вписаны окружности равного радиуса. Докажите, что их линия центров параллельна данной прямой.

8. Через точку P касания двух окружностей проведена прямая, пересекающая эти окружности в точках M и N. В этих точках построены касательные к соответствующим окружностям. Докажите, что они параллельны.

9. Через середины сторон треугольника проведены прямые, параллельные биссектрисам противоположных углов. Докажите, что: а) эти прямые пересекаются в одной точке Q, б) центр тяжести M лежит между точкой Q и центром вписанной окружности O, причем OM : MQ = 1 : 2.

10. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M – точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках K и L к отрезкам AB и AC. Докажите, что точки A, M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

11. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

12. Докажите, что середина отрезка AH (H – ортоцентр) делит пополам дугу окружности девяти точек треугольника ABC, заключенную между основаниями высот BY и CZ.