Комплексные числа и планиметрия (03/12/09)

1. Вспомните соответствующие определения и докажите для $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ свойства:

а) $\overline{z_1 + z_2} = \overline{z_1} + \overline{z_2}$; **б)** $\overline{z_1 z_2} = \overline{z_1} \cdot \overline{z_2}$; **в)** $|z| = |\bar{z}|$; **г)** $z \cdot \bar{z} = |z|^2$; **д)** $|z_1| \cdot |z_2| = |z_1 \cdot z_2|$;

е) $\arg(z_1 \cdot z_2) = \arg(z_1) + \arg(z_2)$; **ж)** $|z_1| + |z_2| \geqslant |z_1 + z_2|$.

2. Пусть z и w — комплексные числа. Докажите, что

$$|z + w|^2 + |z - w|^2 = 2|z|^2 + 2|w|^2.$$

3. Пусть на плоскости фиксирована декартова система координат и задано соответствие $(x, y) \leftrightarrow (x+iy)$ между точками плоскости и комплексными числами.

а) Чему равны длины сторон и величины углов треугольника с вершинами в точках, соответствующих числам $a, b, c \in \mathbb{C}$?

б) Пусть дано $\alpha \in \mathbb{C}$, причём $|\alpha| = 1$. Рассмотрим отображение, переводящее всякое число $z \in \mathbb{C}$ в число αz. Докажите, что соответствующее преобразование точек плоскости является поворотом вокруг точки, соответствующей нулю. Найдите угол поворота.

в) Пусть даны числа $z_0 \in \mathbb{C}$ и $\varphi_0 \in \mathbb{R}$. Найдите преобразование комплексных чисел, соответствующее повороту плоскости на угол φ_0 против часовой стрелки вокруг точки, соответствующей числу z_0;

г) Найдите преобразование комплексных чисел, соответствующее параллельному переносу на данный вектор и симметрии относительно данной прямой.

4. а) Докажите, что точки, соответствующие трём различным комплексным числам a, b, c лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда число $\frac{a-b}{b-c}$ вещественно.

б) Докажите, что точки, соответствующие четырём различным комплексным числам a, b, c, d лежат на одной окружности (или на одной прямой) тогда и только тогда, когда число $\frac{a-c}{a-d} : \frac{b-c}{b-d}$ вещественно.

5. а) *(Неравенство Птолемея)* Докажите, что для произвольных точек A, B, C, D на плоскости выполняется неравенство $AB \cdot CD + BC \cdot AD \geqslant AC \cdot BD$.

б) Докажите, что неравенство из предыдущего пункта обращается в равенство тогда и только тогда, когда $ABCD$ – вписанный четырёхугольник.

в) Докажите, что для произвольных точек $A_1, \ldots, A_6$ на плоскости выполняется неравенство

$$\begin{aligned} &A_1A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_3A_6 \leqslant A_1A_2 \cdot A_3A_6 \cdot A_4A_5 + \\ &+ A_1A_2 \cdot A_3A_4 \cdot A_5A_6 + A_2A_3 \cdot A_1A_4 \cdot A_5A_6 + A_3A_4 \cdot A_2A_5 \cdot A_1A_6. \end{aligned}$$

г) Докажите, что неравенство из предыдущего пункта обращается в равенство тогда и только тогда, когда $A_1A_2A_3A_4A_5A_6$ – вписанный шестиугольник.

6. На плоскости даны треугольник ABC и точка X. Докажите, что

$$\frac{XB}{b} \cdot \frac{XC}{c} + \frac{XC}{c} \cdot \frac{XA}{a} + \frac{XA}{a} \cdot \frac{XB}{b} \geqslant 1.$$

7. Точки A и B движутся равномерно и с равными угловыми скоростями против часовой стрелки по двум окружностям – каждая точка по своей окружности. Докажите, что вершина C правильного треугольника ABC движется с той же угловой скоростью по некоторой окружности.

8. Пусть O – центр описанной окружности треугольника ABC. Докажите, что $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OH}$, где H – ортоцентр треугольника.

9. $ABCD$ – четырехугольник. Точка M такова, что треугольники AMB и CMD – равнобедренные ($AM = MB$, $CM = MD$) и у каждого угол при вершине M равен $120°$. Докажите, что найдётся точка N такая, что треугольники CNB и AND – правильные.

10. На плоскости дан многоугольник $A_1A_2\dots A_n$ и точка O. Докажите, что равенства

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA_1}+\overrightarrow{OA_3} &= 2\cos\tfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_2},\\ \overrightarrow{OA_2}+\overrightarrow{OA_4} &= 2\cos\tfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_3},\\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\dots\dots\\ \overrightarrow{OA_{n-1}}+\overrightarrow{OA_1} &= 2\cos\tfrac{2\pi}{n}\overrightarrow{OA_n}\end{aligned}$$

необходимы и достаточны для того, чтобы существовало аффинное преобразование, переводящие данный многоугольник в правильный, а точку O – в его центр.

11. На сторонах аффинно правильного многоугольника $A_1A_2\dots A_n$ с центром O внешним образом построены квадраты $A_{j+1}A_jB_jC_{j+1}$ ($j = 1,\dots,n$). Докажите, что отрезки B_jC_j и OA_j перпендикулярны и найдите отношение их длин.