Совершенные числа

`Теория.`

Через $T(n)$ будем обозначать сумму всех делителей числа n.

Число n называется ***совершенным***, если $T(n) = 2n$.

Число n называется ***мультисовершенным*** (иначе говоря, ***k-кратным совершенным)***, если $T(n) = kn$ (где $k > 2$ – натуральное число).

Число n называется ***фигурным*** (иначе говоря, ***q-угольным***), если оно равно сумме нескольких первых членов арифметической прогрессии с разностью $(q-2)$ и первым членом, равным 1 (где $q > 2$ – натуральное число).

k-ым числом Мерсенна называется число $M_k = 2^k - 1$.

Будем использовать обозначение $N_k = 2^{k-1}(2^k - 1)$.

Теорема. *Чётное число n является совершенным тогда и только тогда, когда $n = N_k$ для некоторого k такого, что M_k – простое число.*

До сих пор никому не известно ни одного нечётного совершенного числа. Но до сих пор никто не может доказать, что нечётных совершенных чисел не существует.

1. Для $q = 3, 4, 5, 6$ выясните, может ли какое-нибудь число N_k быть q-угольным.

2. а) Докажите, что нечётное совершенное число не может иметь меньше, чем $s = 3$ различных простых делителей;

б) Докажите утверждение пункта **а)** для как можно большего s.

3. Докажите, что если нечётное совершенное число существует, то оно имеет вид $n = (4l+1)^{(4b+1)} \cdot p_1^{2\alpha_1} \cdot \ldots \cdot p_s^{2\alpha_s}$.

4. Приведите примеры r-кратных совершенных чисел для $r = 3, 4, 5, 6$.

5. а) Докажите, что для любого натурального k существует мультисовершенное число вида $2^{k-1}m$, где m – нечётное;

б) Приведите примеры соответствующих мультисовершенных чисел для $k = 4, 6, 9, 10, 11$.

6. Докажите, что все простые делители числа M_{2k+1} дают при делении на 8 остаток или 1, или 7.

7. Докажите, что все делители числа M_p дают остаток 1 при делении на $2p$.

8. Пусть числа $p = 4m + 3$ и $q = 2p + 1$ – оба простые. Докажите, что тогда M_p делится на q.