Просто геометрия... (06/10/09)

1. Дан произвольный треугольник. Каждую сторону этого треугольника разбили на три равные части и полученные точки соединили с противоположными вершинами треугольника. Эти отрезки в пересечении образовали шестиугольник. Докажите, что диагонали, соединяющие противоположные вершины шестиугольника, пересекаются в одной точке.

2. На сторонах треугольника AB, BC и CA отметили точки P, Q и R соответственно. Оказалось, что $\frac{AP}{PB} = \frac{BQ}{QC} = \frac{CR}{RA}$. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABC и PQR совпадают.

3. На сторонах треугольника AB, BC и CA отметили точки C_1, A_1 и B_1 соответственно и соединили их с противоположными вершинами. Эти отрезки в пересечении образовали треугольник $A_2B_2C_2$. Найдите $\frac{S_{A_1B_1C_1}}{S_{ABC}}$ и $\frac{S_{A_2B_2C_2}}{S_{ABC}}$, если $\frac{CA_1}{A_1B} = \alpha$, $\frac{BC_1}{C_1A} = \beta$, $\frac{AB_1}{B_1C} = \gamma$.

4. $ABCD$ — трапеция с боковыми сторонами BC и AD. Точки M и N лежат на диагоналях трапеции, так что BM параллельна стороне CD, а CN параллельна стороне AB. Докажите, что MN параллельна основаниям трапеции.

Аффинные преобразования (08/10/09)

5. а) Докажите, что при аффинном преобразовании параллельные прямые переходят в параллельные.

б) Докажите, что пересекающиеся прямые переходят в пересекающиеся, а точка пересечения — в точку пересечения.

6. Пусть точки A_1, B_1, C_1, D_1 – образы точек A, B, C, D при аффинном преобразовании. Докажите, что если $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$, то $\overrightarrow{A_1B_1} = \overrightarrow{C_1D_1}$. (*То есть мы можем корректно определить образ вектора при аффинном преобразовании.*)

7. Докажите, что если L – аффинное преобразование, то

а) $L(\overrightarrow{0}) = \overrightarrow{0}$;

б) $L(\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}) = L(\overrightarrow{a}) + L(\overrightarrow{b})$;

в) $L(k\overrightarrow{a}) = kL(\overrightarrow{a})$.

8. Докажите, что при аффинных преобразованиях сохраняется отношение **а)** длин параллельных отрезков, **б)** площадей.

9. Докажите, что для любых двух треугольников ABC и $A'B'C'$ существует единственное аффинное преобразование, переводящее A в A', B в B' и C в C'.

10. Верно ли, что при аффинном преобразовании окружность переходит в окружность?

11. При каких n всякий центрально-симметричный n-угольник можно аффинным преобразованием перевести в правильный?

12. Каждая диагональ выпуклого пятиугольника параллельна одной из сторон. Докажите, что аффинным преобразованием этот пятиугольник можно перевести в правильный.

13. Докажите, что растяжение плоскости относительно прямой является аффинным преобразованием.

14. Докажите, что любое аффинное преобразование можно представить в виде композиции **а)** двух сжатий и аффинного преобразования, переводящего каждый треугольник в подобный ему треугольник; **б)** одного сжатия и аффинного преобразования, переводящего каждый треугольник в подобный ему треугольник.

15. На сторонах AB, BC и CD параллелограмма $ABCD$ взяты точки K, L и M соответственно, делящие эти стороны в одинаковых отношениях. Пусть b, c, d – прямые, проходящие через B, C, D параллельно прямым KL, KM, ML соответственно. Докажите, что прямые b, c, d проходят через одну точку.

16. Отмечено 100 точек – N вершин выпуклого N-угольника и $(100 - N)$ точек внутри этого N-угольника. Точки как-то обозначены, независимо от того, какие являются вершинами N-угольника, а какие лежат внутри. Известно, что никакие три точки не лежат на одной прямой, а никакие четыре – на двух параллельных прямых. Разрешается задавать вопросы типа: чему равна площадь треугольника XYZ (X, Y, Z – из числа отмеченных точек). Докажите, что 300 вопросов достаточно, чтобы выяснить, какие точки являются вершинами и чтобы найти площадь N-угольника.