

Программа к экзамену по спецкурсу в 10 математическом классе, 2009-2010

Неравенства

Основные понятия и определения. Среднее арифметическое, среднее квадратическое, среднее геометрическое, среднее гармоническое чисел x_1, \dots, x_n .

Теоремы. Неравенство Коши-Буняковского, транс-неравенство, неравенства о средних.

Комплексные числа

Основные понятия и определения. Комплексные числа, действительная и мнимая часть, арифметические операции с комплексными числами, модуль, аргумент, сопряжённое число, корень n -ой степени из комплексного числа, остатки от деления на $x^2 + 1$.

Теоремы. Существование тригонометрической формы комплексного числа, умножение комплексных чисел в тригонометрической форме, первая формула Муавра, извлечение корней из комплексных чисел в тригонометрической форме (вторая формула Муавра), извлечение квадратного корня из комплексного числа, записанного в обычной форме, запись движений плоскости в комплексных координатах.

Последовательности

Основные понятия и определения. Последовательность, периодическая последовательность, предпериод, период, наименьший период, сумма.

Рекуррентное соотношение k -го порядка, решение рекуррентного соотношения, ограниченная (неограниченная) последовательность, монотонная последовательность, числа Фибоначчи.

Сходящаяся последовательность, предел последовательности, расходящаяся последовательность, бесконечный предел, последовательность, сходящаяся к бесконечности, точная верхняя и нижняя грани множества.

Теоремы. О длине наименьшего периода, о сумме периодических последовательностей.

Решение рекуррентного соотношения вида $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ для произвольных комплексных A и B .

Единственность предела, ограниченность сходящейся последовательности, о двух милиционерах, арифметические операции с пределами, о сходимости ограниченной монотонной последовательности (Вейерштрасса).

Аффинные преобразования

Основные понятия и определения. Аффинные преобразования

Теоремы. Об образе параллельных и пересекающихся прямых, образе вектора, о линейности аффинного преобразования, о сохранении отношений длин параллельных отрезков и площадей, о том, что существует единственное аффинное преобразование, переводящее первый из данных треугольников во второй.

Множества

Основные понятия и определения. Множество, элемент, подмножество, знаки \in и \subset ; пустое множество, равные множества; пересечение, объединение, разность, симметрическая разность множеств; отображение, обратное отображение, взаимно однозначное соответствие, инъекция, сюръекция; образ, прообраз элемента, образ, прообраз подмножества множества при отображении; мощность множества, множество, меньше либо равное по мощности, равномощные множества, конечные, счётные, континуальные множества.

Отношение на элементах множества, отношение эквивалентности.

Сочетания, число сочетаний, треугольник Паскаля.

Теоремы. Количество подмножеств множества из n элементов; 10 свойств операций с множествами, формула включений-исключений, существование обратного отображения, единственность обратного отображения, формулы $f(f^{-1}(y)) = y$, $f^{-1}(f(x)) = x$ (при каких условиях?); 4 свойства образов при отображении; равномощность \mathbb{N} и \mathbb{Z} , \mathbb{N} и \mathbb{Q} , прямой и отрезка; теорема Кантора; теорема Кантора-Берштейна (только формулировка); неравномощность натурального ряда и числовой прямой.

Основные свойства чисел сочетаний, бином Ньютона, основные свойства треугольника Паскаля.

Графы

Основные понятия и определения. Граф, рёбра, вершины, степень вершины, изоморфные графы, петли, кратные рёбра, двудольные графы, связность, путь, цикл, дерево, висячая вершина, плоский граф, грань, планарный граф.

Теоремы. Теорема о числе рёбер двудольного графа; лемма о рукопожатиях; наличие в дереве висячих вершин, соотношение между V и P в дереве, формула Эйлера.

Теория чисел

Основные понятия и определения. Делимость, остатки, простые и составные числа, НОД, взаимная простота, сравнения по модулю, вычет как класс эквивалентности, Z_m , Z_p , $\varphi(n)$.

Теоремы. Эквивалентность двух определений сравнений по модулю; свойства сравнений (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, два свойства деления); свойство одинаковых сравнений по взаимно простым модулям; признаки делимости (и нахождения остатка) на 10, 2, 5, 3, 9, 11, 7, 13; малая теорема Ферма и её следствие; теорема Вильсона; алгоритм Евклида нахождения НОД; разрешимость сравнения вида $\text{mod } axbm$; китайская теорема об остатках (только формулировка для случая двух сравнений); теорема Эйлера; мультипликативность функции Эйлера; теорема о чётных совершенных числах.

Геометрия Галилея

Основные понятия и определения. Движения, расстояние, прямая, особая прямая, окружность, длина отрезка, длина дуги, величина угла, многоугольник, равнобедренный треугольник, биссектриса угла, высота, биссектриса, медиана треугольника, цикл, радиус цикла, циклический поворот, соответствие двойственности.

Теоремы. О сохранении углов при преобразованиях Галилея, о значении угла между прямыми, о корректности определения радиуса цикла, о представлении движения в виде композиции параллельного переноса и циклического поворота, галилеевы числа (координаты), запись движений в галилеевых координатах.