Задачи.

Преобразование f плоскости – это отображение, которое каждой точке A плоскости ставит в соответствие некоторую точку плоскости, которую называют образом точки A и обозначают $f(A)$. Образом фигуры T называют множество $f(T)$ точек плоскости, являющихся образами точек фигуры T. Говорят, что преобразование f переводит фигуру T в фигуру $f(T)$.

1. Дорога, соединяющая пункты A и C, проходит через пункт B. Пятеро ребят – Аня, Вася, Маша, Миша и Марина – вышли одновременно из пункта A и одновременно пришли в пункт C. Аня шла из A в C с постоянной скоростью. Вася шёл из A в B с одной скоростью, а из B в C – с другой. Маша шла до пункта B вместе с Васей, потом с некоторой постоянной скоростью шла до середины дороги AC, где встретилась с Аней и шла вместе с ней до пункта C. Миша шёл вместе с Васей и Машей только половину дороги AB, а потом отделился от них и с постоянной скоростью шёл до пункта C. Марина вышла из пункта A с некоторой постоянной скоростью, в середине дороги BC встретилась с Васей и вместе с ним закончила путь до пункта C. Докажите, что Маша, Миша и Марина в некоторый момент внутри пути оказались в одном месте.
2. На плоскости Галилея нарисован галилеев треугольник. Верно ли, что обязательно существует равнобедренный по Евклиду треугольник, по Галилею равный данному?
3. На плоскости нарисован евклидов треугольник. Верно ли, что обязательно существует равнобедренный по Галилею треугольник, по Евклиду равный данному?
4. Может ли какой-то выпуклый многоугольник быть равен по Галилею какому-то невыпуклому многоугольнику?
5. Придумайте критерий того, что два данных четырёхугольника можно совместить движением Галилея.
6. Верно ли, что для всякого галилеева треугольника ABC найдётся равный ему по Галилею $\triangle A'B'C'$, в котором галилеева высота $A'H'$ является евклидовой высотой?
7. Верно ли, что для всякого галилеева треугольника ABC найдётся равный ему по Галилею $\triangle A'B'C'$, в котором галилеева биссектриса $A'N'$ является евклидовой биссектрисой?
8. Докажите, что около любого галилеева треугольника можно описать цикл, причём единственный.
9. Когда около галилеева четырёхугольника можно описать цикл?
10. Существуют ли какие-нибудь другие преобразования плоскости, кроме движений Галилея, сохраняющие галилеево расстояние?
11. Существуют ли какие-нибудь другие непрерывные преобразования плоскости, кроме движений Галилея, сохраняющие галилеево расстояние?
12. Докажите теорему о равенстве галилеевых длин касательных, проведённых к данному циклу из данной точки.
13. Верно ли, что любой галилеев цикл можно перевести в любой другой движением Галилея?
14. Докажите теорему об угле между касательной и хордой для циклов на плоскости Галилея.
15. Докажите теорему о степени точки для циклов на плоскости Галилея.
16. *В этой задаче всё галилеево.* Биссектрисы AA' и CC' треугольника ABC пересекаются в точке B''. Известно, что $AB''=4$, $CB''=-2$. Найдите длины сторон, длины медиан и величины углов треугольника ABC, если радиус описанного около него цикла равен (-2).
17. *В этой задаче всё галилеево.* Точки A и C лежат на одной особой прямой, точки B и D – на другой особой прямой. Отрезки AD и BC пересекаются в точке P, прямые AB и CD пересекаются в точке Q. Чему может быть равно отношение углов $\angle(AQ,PQ):\angle(PQ,QC)$?
18. *В этой задаче всё галилеево.* В треугольнике ABC на биссектрисе угла C взята точка $N\neq C$, точки A_1, B_1 – середины сторон CB, CA, точки A_2, B_2, C_2 – точки касания вписанного в треугольник цикла с прямыми BC, CA, AB.
    1) Докажите, что если $AC=CB$, то $S_{\triangle NA_1A_2}=S_{\triangle NB_1B_2}$.
    2) Оказалось, что $S_{\triangle NA_1A_2}=S_{\triangle NB_1B_2}$. Верно ли, что треугольник ABC – равнобедренный?

19. *В этой задаче всё галилеево.* В четырёхугольнике $ABCD$ противоположные вершины A и C лежат на одной особой прямой. Докажите, что биссектрисы углов B и D пересекаются на этой же прямой.

20. *В этой задаче всё галилеево.* Точки A и B на данном цикле фиксированы, а точка C перемещается по циклу. Найдите геометрическое место

1) точек пересечения медиан треугольника ABC;

2) точек пересечения биссектрис AA_1 и BB_1 треугольника ABC.

21. Рассмотрим преобразование плоскости $(t, x) \mapsto (at, bx)$, где a и b – некоторые ненулевые действительные числа. Назовём такое преобразование изменением масштаба, сопровождающееся (при соответствующих знаках a и b) изменением направления времени и/или координаты. Верно ли, что, используя изменение масштаба и движения Галилея,

1) любой галилеев отрезок можно перевести в любой?

2) любой галилеев треугольник можно перевести в любой?

3) любой галилеев цикл можно перевести в любой?

22. Докажите, что середины хорд параболы, параллельных данной хорде, лежат на одной прямой, параллельной оси симметрии параболы.

23. Укажите аффинное преобразование, переводящее данную параболу $(y = x^2)$ в себя, а точку $(0, 2)$ в точку $(5, 27)$.

---

24. Дано взаимно-однозначное преобразование f плоскости на себя.

1) Пусть f – непрерывное. Верно ли, что f – аффинное?

2) Может ли f переводить некоторую прямую в окружность?

2) * Пусть f – непрерывное. Может ли f переводить некоторую прямую в окружность?

3) Пусть f – непрерывное. Может ли f переводить некоторый треугольник в окружность?

4) Может ли f переводить некоторую окружность в параболу?

5) Может ли f переводить каждую параболу в прямую?

6) Может ли f переводить каждую прямую в параболу?

7) Пусть f – непрерывное и известно, что образом каждого треугольника является треугольник. Верно ли, что f – аффинное?

8) Пусть f – непрерывное и про каждую прямую, кроме прямой l, известно, что её образом является прямая. Верно ли, что f – аффинное?

9) Пусть f – непрерывное и про каждую прямую, кроме прямых, параллельных прямой l, известно, что её образом является прямая. Верно ли, что f – аффинное?

25. Докажите, что образ отрезка при аффинном преобразовании является отрезком.

26. Образом каждой прямой при преобразовании f плоскости является прямая. Верно ли, что f – аффинное?

27. Аффинное преобразование f переводит некоторый многоугольник в себя. Верно ли, что f – движение?

28. Аффинное преобразование f переводит некоторую окружность в себя. Верно ли, что f – движение?

29. Аффинное преобразование f переводит параболу $(y = x^2)$ в себя. Верно ли, что f – движение Галилея?

30. Аффинное преобразование f переводит в себя каждую точку некоторого многоугольника. Верно ли, что f – тождественное преобразование плоскости?

31. Какие подмножества точек плоскости могут быть множеством всех неподвижных точек аффинного преобразования?

32. Назовём n-связкой n прямых на плоскости, пересекающихся в одной точке. При каких n любую n-связку можно перевести в любую другую n-связку аффинным преобразованием?

---

33. Найдите все фигурные числа, являющиеся простыми.

34. Докажите, что если нечётное совершенное число существует, то оно имеет не менее трёх различных простых делителей.

35. Опишите множество всех нечётных мультисовершенных чисел N таких, что $2N$ тоже мультисовершенное.

36. Совершенное число N, большее 28, делится на 7. Докажите, что оно делится на 49.

37. Назовём два графа *родственными*, если они оба получаются из некоторого третьего графа добавлением висячих вершин. Является ли родственность отношением эквивалентности на множестве графов?

38. Приведите пример отношения эквивалентности на множестве натуральных чисел такого, чтобы в каждом классе эквивалентности было конечное число элементов и в любых двух различных классах было разное число элементов.

39. Зафиксируем окружность на плоскости и назовём две прямые *дружественными*, если они пересекаются и их точка пересечения лежит на данной окружности. Является ли дружественность отношением эквивалентности на множестве всех прямых?

40. Зафиксируем цикл на плоскости и назовём два цикла *дружественными*, если они касаются друг друга и данного цикла в одной и той же точке. Является ли дружественность отношением эквивалентности на множестве всех циклов, кроме фиксированного?

41. Назовём два комплексных числа *равномнимыми*, если их разность – действительное число. Докажите, что равномнимость является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{C}$ комплексных чисел, проверьте корректность определения операций $\odot$ и $\oplus$ и опишите $([\mathbb{C}], \oplus, \odot)$.

42. Назовём два действительных числа *равноиррациональными*, если их разность – рациональное число. Докажите, что равноиррациональность является отношением эквивалентности на множестве $\mathbb{R}$ действительных чисел, проверьте корректность определения операций $\odot$ и $\oplus$ и опишите $([\mathbb{R}], \oplus, \odot)$.

43. Найдите в $\mathbb{Z}_2[x]$ все неприводимые многочлены четвёртой степени.

44. Докажите, что при простом p для любого ненулевого элемента $a \in \mathbb{Z}_p$ найдётся элемент $b \in \mathbb{Z}_p$ такой, что $a \odot b = 1$.

45. Пусть $[\mathbb{Z}_2[x]]$ – множество классов эквивалентности $\mathbb{Z}_2[x]$ для отношения $(f \sim g) \Leftrightarrow (f - g = \alpha \cdot \beta \mid \beta \in \mathbb{Z}_2[x])$.
1) Опишите операции $\odot$ и $\oplus$ для $\alpha(x) = x^3 + x + 1$.
2) Приведите пример α такого, что найдётся элемент $A \in [\mathbb{Z}_2[x]]$ такой, что $A \odot A \odot A = [0]$, но $A \odot A \neq [0]$.
3) Оказалось, что для некоторых $A, B \in [\mathbb{Z}_2[x]]$ выполнено $A \odot A = [0]$ и $B \odot B = [0]$. Верно ли, что $A \odot B = [0]$?

46. Пусть $[\mathbb{R}[x]]$ – множество классов эквивалентности $\mathbb{R}[x]$ для отношения $(f \sim g) \Leftrightarrow (f - g = \alpha \cdot \beta \mid \beta \in \mathbb{R}[x])$.
1) Опишите $([\mathbb{R}[x]], \oplus, \odot)$ для $\alpha(x) = 2x^2 + 3$.
2) Опишите $([\mathbb{R}[x]], \oplus, \odot)$ для $\alpha(x) = x^2 + 2x + 2$.

При решении следующих задач обязательно надо использовать комплексные числа.

47. Точки M и N – середины диагоналей четырёхугольника $ABCD$. Докажите, что $AB^2+BC^2+CD^2+DA^2 = AC^2+BD^2+4MN^2$.

48. В правильном треугольнике ABC проведена высота AH, O — точка пересечения медиан. Введите удобную систему координат и запишите комплексные координаты точек A, B, C, H и O.

49. Изобразите на координатной плоскости все точки, соотвествующие числам, которые при возведении в шестую степень дают минус единицу.

50. Пусть ε — такое число, что при умножении на него комплексной координаты точки сама точка поворачивается против часовой стрелки на угол 60° вокруг начала координат. Изобразите на координатной плоскости число bi, $b\varepsilon^2$, $b\bar{\varepsilon}$, если b — комплексная координата некоторой точки B в первой четверти.

51. Докажите, что четырёхугольник $ABCD$ является параллелограммом тогда и только тогда, когда комплексные координаты a, b, c, d его вершин удовлетворяют равенству $a+c=b+d$.

52. Противоположные стороны AB и DC четырёхугольника $ABCD$ разделены точками M и N в отношении λ, считая от вершин A и D. Докажите, что отрезок MN делит среднюю линию четырёхугольника в том же отношении λ, и сам делится этой средней линией пополам.

53. Дан квадрат $ABCD$ и комплексные координаты a и b его вершин A и B. Найдите комплексные координаты остальных вершин квадрата.

54. Точка M — середина дуги AB окружности. Докажите, что для произвольной точки этой окружности N имеет место равенство $|AM^2 - AN^2| = AN \cdot BN$.

55. Докажите, что диагонали вписанного в окружность четырёхугольника перпендикулярны тогда и только тогда, когда сумма квадратов двух его противоположных сторон равна сумме квадратов двух других противоположных сторон.

56. Дана окружность с центром в начале координат и точка $P(p)$ окружности.
а) Докажите, что уравнение касательной к окружности в точке P имеет вид $\bar{p}z+p\bar{z}=2$, если радиус окружности равен 1.
б) Запишите уравнение касательной для произвольного центра и радиуса окружности.

57. В результате поворота на 90° вокруг точки O отрезок AB перешел в отрезок A_1B_1. Докажите, что медиана треугольника OAB_1 перпендикулярна прямой AB.

58. Пусть вокруг треугольника описана окружность с центром в начале координат. Докажите, что основание высоты, опущенной из вершины a, имеет координаты $\frac{1}{2}(a+b+c-\bar{a}bc)$.

59. Из основания треугольника опущены перпендикуляры на две стороны, не соответственные этой высоте. Докажите, что расстояние между основаниями перпендикуляров не зависит от выбора высоты треугольника.

60. На комплексной плоскости нарисован правильный n-угольник. Дан многочлен $P(z)$ с комплексными коэффициентами степени меньше n. Докажите, что среднее арифметическое значений $P(z)$ в вершинах многоугольника равно значению многочлена в его центре, если **1)** центр совпадает с началом координат; **2)** в общем случае.
Существуют ли многочлены **3)а)** n-ой, **б)** $(n+1)$-ой степени, для которых это утверждение верно? **4)а,б)** неверно?

61. Каждую сторону n-угольника в процессе обхода против часовой стрелки продолжили на её длину. Оказалось, что концы построенных отрезков расположены в вершинах правильного n-угольника. Докажите, что исходный n-угольник тоже был правильным.