Задачи – 4.

1. Докажите, что из всякой сходящейся последовательности можно выбрать монотонную подпоследовательность.
2. Исследуйте последовательность $x_n = \sqrt{n+2} - \sqrt{n}$ на монотонность и ограниченность.
3. Найти сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}$; $\frac{1}{2-\sqrt{2}}$, ...
4. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{P_m(n)}{P_k(n)}$, где $P_i(n)$ — многочлен степени i.
5. У сходящейся последовательности переставили конечное число членов. Изменится ли предел? А если бесконечное?
6. Докажите, что если последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, и все ее члены, начиная с некоторого, положительны, то последовательность $\{\frac{1}{a_n}\}$ сходится к $+\infty$.
7. Последовательность x_n сходится к $+\infty$, а последовательность y_n не имеет предела (ни конечного, ни бесконечного). Могут ли последовательности $x_n \cdot y_n^2$ или x_n/y_n^2 иметь конечный предел?
8. Последовательность y_n такова, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(y_{n+1} - \dfrac{y_n}{2}) = 0$. Докажите, что последовательность y_n сходится к нулю.
9. Найдите предел последовательности $x_n = \sqrt[n]{n}$.
10. Докажите, что последовательность $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$ сходится.
11. Найдите предел последовательности $x_n = \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}}\right)$.
12. Найти число членов арифметической прогрессии, первый член которой равен 5, а разность равна 1, если сумма всех её членов равна сумме бесконечно убывающей геометрической прогрессии, имеющей вторым членом $15\frac{3}{7}$, а третьим $13\frac{11}{49}$.
13. В квадрат, сторона которого равна a, вписан круг, в круг вписан квадрат, в этот квадрат вписан круг, и так до бесконечности. Найти сумму a) периметров всех квадратов; b) площадей всех квадратов; c) длин всех окружностей.
14. Одно из ненулевых решений реккуретного соотношения вида $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$ является периодической последовательностью с периодом T. Докажите, что хотя бы один из корней характеристического уравнения является корнем из 1 степени T.
15. Периодическая последовательность с периодом T, не являющаяся геометрической прогрессией, удовлетворяет данному реккурентному соотношению вида $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$. Докажите, что все решения данного реккурентного соотношения периодичны с периодом T.
16. В новогоднюю ночь Ване пришло в голову, что в наступающем году он будет ежедневно заниматься спортом. Обрадовавшись этой идее, он решил сразу составить себе план. В соответствии с этим планом в первые два дня нового года Ваня будет заниматься спортом столько, сколько получится, и, кроме того, за это время придумает два числа A и B. Продолжительность a_{n+2} Ваниных занятий спортом в $(n+2)$-ой день будет вычисляться, исходя из продолжительностей занятий в два предыдущих дня, по формуле $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n$. В случае, если $a_n < 0$, Ваня в n-ый день будет смотреть трансляции хоккейных матчей в течение $(-a_n)$ часов. О комплексных числах Ваня никогда не слышал, поэтому придуманные им коэффициенты A и B наверняка будут действительными. Может ли так случиться, что расписание Ваниных занятий спортом в течение года будет одним и тем же каждую неделю, но не одним и тем же каждый день?
17. Решите реккурентные соотношения вида $a_{n+2} = Aa_{n+1} + Ba_n + C$.
18. Придумайте последовательность, которая ни для какого m не является решением реккурентного соотношения m-го порядка с постоянными коэффициентами (т.е. такого, в котором правило выражения a_{n+m} через $a_{n+m-1}, \ldots, a_n$ не зависит от n).
19. В последовательности $\{a_n\}$ $a_{n+1} = \dfrac{k + a_n}{1 - a_n}$, где $k > 0$. Оказалось, что $a_1 = a_{13}$. Чему может быть равно k?
20. Даня очень устал за день, исследуя, какие последовательности сходятся к нулю, а какие нет. Ночью ему приснилось, что Сеня открыл Очень Полезную Последовательность $\varkappa_n$. В Данином сне эта последовательность сходится к нулю и, кроме того, является *самой большой* последовательностью, сходящейся к нулю, в том смысле, что верно следующее правило. Если для некоторой последовательности $\{a_n\}$ последовательность $\{\frac{a_n}{\varkappa_n}\}$ ограничена, то последовательность $\{a_n\}$ сходится к нулю, а если не ограничена – то $\{a_n\}$ не сходится к нулю. Таким образом, всё изучение сходимости последовательностей к нулю сводится к их сравнению с Очень Полезной Последовательностью. Существует ли такая Очень Полезная Последовательность, которая приснилась Дане?