Задачи – 2.

1. В классе часть детей ходила на Малый мехмат, 11 человек ездили на матбой в Петербург, 20 учеников сдавали вступительные экзамены. 4 маломехматян ездили в Петербург, 14 маломехматян сдавали экзамены. Из игравших в матбой экзамены сдавали 8, а 3 успели везде. Сколько детей сдавали только экзамены, если в классе 25 человек, и каждый в чём-нибудь участвовал?

Пусть N_j – множество натуральных чисел, делящихся на j, а $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

2. Найдите количество элементов в $((N_6 \cup N_{27} \cup N_{12}) \setminus N_{18}) \cap [321]$.

3. Сколько существует отображений из $[a]$ в $[b]$?

4. Верны ли равенства: $(A \setminus B) \cap (A \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$; $(A \setminus B) \cup (A \cap B) = A \cup B$?

5. Упростите выражения: $A \triangle (B \triangle A)$; $(A \cup C) \cap (B \setminus A)$; $(A \cap B) \cup (C \setminus A) \cap (B \setminus C)$.

6. Докажите, что число последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц чётно, равно числу последовательностей из нулей и единиц длины 100, в которых число единиц нечётно.

В следующих трёх задачах приведите примеры счётных подмножеств $M \subset \mathbb{R}$, для которых отображение $f\colon M \longrightarrow M$, $f(x) = x^2$ обладает указанным свойством. В каких случаях определено обратное отображение $f^{-1}\colon M \longrightarrow M$?

7. f не определено; f является инъекцией, но не сюръекцией.

8. f является сюръекцией, но не инъекцией.

9. f является взаимно-однозначным.

10. f отображает множество $\{1, 2, 3, 4, 5\}$ в себя по следующему правилу: $1 \to 3$, $2 \to 4$, $3 \to 1$, $4 \to 5$, $5 \to 2$. Найдите f^k, $(f^{-1})^k$, $k \in \mathbb{N}$.

Бесконечные подмножества A_j и B_j множества S равномощны для каждого $j \in \mathbb{N}$. Верно ли, что равномощны

11. $A_1 \sqcup A_2$ и $B_1 \sqcup B_2$; $A_1 \cap A_2$ и $B_1 \cap B_2$?

12. $A_1 \times A_2$ и $B_1 \times B_2$; $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \times \ldots$ и $B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n \times \ldots$?

13. $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots$ и $B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n \cup \ldots$, если S – множество всех подмножеств отрезка?

В следующих 9 задачах найдите мощность множества:

14. Целочисленных векторов в пространстве;

15. Многоугольников на плоскости;

16. Точек (x, y) плоскости, удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{cases} x &= \sqrt{x^2+y^2}\cos(x^2+y^2) \\ y &= \sqrt{x^2+y^2}\sin(x^2+y^2) \end{cases};$$

17. Попарно неизоморфных графов со счётным мн-вом вершин;

18. Многочленов с целыми коэффициентами;

19. *Почти периодических* последовательностей из 0 и 1 (последовательность *почти периодическая*, если отличается от некоторой периодической только в конечном множестве позиций);

20. Разбиений счётного множества A (на конечное или счётное множество подмножеств);

21. Непрерывных на $\mathbb{R}$ функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$;

22. Монотонных на $\mathbb{R}$ функций $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

В следующих 3 задачах определите, какую мощность может иметь множество:

23. Попарно не пересекающихся кругов на плоскости;

24. Попарно не пересекающихся окружностей радиуса 1 в пространстве;

25. Последовательностей из 0 и 1, любые две из которых отличаются в бесконечном множестве позиций.

26. Докажите теорему Кантора-Бернштейна.

27. Дано конечное множество M и натуральное число k. Выделены некоторые $2k$-элементные подмножества M. Известно, что в каждом подмножестве множества M, состоящем не более чем из $2(k+1)$ элементов, либо не содержится ни одного выделенного подмножества, либо все в нем содержащиеся выделенные подмножества имеют общий элемент. Докажите, что все выделенные подмножества имеют общий элемент.

28. *Конгруэнтными* будем называть два подмножества множества натуральных чисел, если одно получается из другого сдвигом на целое число. Можно ли разбить множество натуральных чисел на бесконечное число (не пересекающих друг друга) бесконечных конгруэнтных подмножеств?

29. В классе организуется турнир по перетягиванию каната. В турнире ровно по одному разу должны участвовать всевозможные команды, которые можно составить из учащихся этого класса (кроме команды всего класса). Доказать, что каждая команда учащихся будет соревноваться с командой всех остальных учащихся класса.

30. Докажите, что $43^{101} + 23^{101}$ делится на 66; $7^{120} - 1$ делится на 143; $300^{3000} - 1$ делится на 1001.

31. Две соседки пошли на рынок. По возвращении оказалось, что обе купили глазированные сырки, причём первая купила на 2 сырка больше, но вторая покупала сырки на 20 коп. дороже. При этом первая заплатила на 6 р. 19 коп. больше. Докажите, что хотя бы одну из соседок обсчитали.

32. Опишите все x, удовлетворяющие сравнению
$111x \equiv 999 (\bmod 555)$; $2x \equiv 4 (\bmod 5)$.
33. Докажите, что $1^n + 2^n + \ldots + (n-1)^n$ делится на n при любом нечётном $n \geqslant 0$.
34. Решите в целых числах сравнение $k^2 + k + 1 \equiv 0 (\bmod 101)$.
35. Докажите, что среди любого 51 целого числа, найдутся по крайней мере два, квадраты которых дают одинаковые остатки при делении на 100.
36. Докажите, что $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133 при $n \in \mathbb{N}$.
37. p – простое число. Докажите, что $(a+b)^p \equiv a^p + b^p \pmod p$ для любых целых a и b.
38. p и q – различные простые числа. Докажите, что $p^q + q^p \equiv p + q \pmod{pq}$.
39. $p > 5$ – простое число. Докажите, что $\underbrace{1\ldots1}_{p-1} \vdots\, p$.
40. Найдите остаток от деления $(2007 \cdot 2008 \cdot \ldots \cdot 2064)^{64}$ на 59; $2^{197} \cdot 10^{393}$ на 197; 790^{201} на 303.
41. Пусть p и q — различные нечётные простые числа. Докажите, что $\left[\frac{p^q+q^p}{pq}\right]$ — чётное число.
42. Докажите следующий признак делимости на 19: если у числа убрать последнюю цифру, а затем добавить к получившемуся числу эту цифру, умноженную на 2, то первоначальное число будет делиться на 19 в том и только в том случае, если получившееся число делится на 19.
43. Докажите, что $(x+y)$ делится на 5, если известно, что

$$\begin{cases} 2x + 3y \equiv 3 (\bmod 5) \\ 3x + y \equiv 4 (\bmod 5) \end{cases}$$

44. Пусть $(a^2 + b^2) \vdots\, p$, причём ни a, ни b не делятся на p (p — простое, большее двух). Найдите остаток p при делении на 4.
45. Дан прямоугольник 451×287. На какое минимальное число равных квадратов его можно разрезать?
46. Постройте приведённую систему вычетов по mod 12; 9; 7.
47. Докажите, что для любого нечётного числа m существует натуральное n такое, что $(2^n - 1) \vdots\, m$.
48. Докажите, что если числа $a_1, \ldots, a_n$ взаимно просты в совокупности, то уравнение $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = 1$ разрешимо в целых числах.
49. Может ли на сфере быть только одна рациональная точка (т.е. точка, все три координаты которой – рациональные числа)?
50. Опишите все способы покрасить каждое натуральное число в один из трех цветов так, чтобы выполнялось условие: если числа a, b, c (не обязательно различные) удовлетворяют условию $2000(a+b) = c$, то они либо все одного цвета, либо трех разных цветов.
51. Решить в натуральных числах: $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = 2xyzu$.
52. Решить в целых положительных числах уравнение $x^{2y} + (x+1)^{2y} = (x+2)^{2y}$.
53. Назовём натуральное число *разрешённым*, если оно имеет не более 20 различных простых делителей. В начальный момент имеется куча из $2010!$ камней. Два игрока по очереди забирают из кучи некоторое разрешённое количество камней (возможно, каждый раз новое). Побеждает тот, кто заберёт последние камни. Кто выигрывает при правильной игре?
54. Пусть у двух целых положительных чисел равны суммы делителей и равны суммы всех обратных величин к делителям. Докажите, что эти числа равны.
55. Решите уравнение $\varphi(x) = \frac{x}{3}$.
56. Докажите, что НОД$(m, 10) = 1$, то $\varphi(m) \vdots\, L(m)$, где $L(m)$ – длина периода дроби $\frac{1}{m}$.
57. Имеется бесконечное количество карточек, на каждой из которых написано какое-то натуральное число. Известно, что для любого натурального числа n существуют ровно n карточек, на которых написаны делители этого числа. Доказать, что любое натуральное число встречается хотя бы на одной карточке.
58. Докажите, что если натуральное число N представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, делящихся на 3, то оно также представляется в виде суммы трех квадратов целых чисел, не делящихся на 3.