Уроки №87-88 15-16.04.10

Производная. Вычисление производных

---

1. Решение задач.

Вычислите:

$$1)\ \arccos(\cos 6); \quad 2)\ \operatorname{arctg}\left(\operatorname{tg}(\pi\sqrt{3})\right); \quad 3)\ \sin(\arccos 0,6); \quad 4)\ \operatorname{tg}(\arcsin b).$$

Ответы:

$$1)\ 2\pi - 6; \qquad 2)\ \pi\sqrt{3} - 2\pi; \qquad 3)\ 0,8; \qquad 4)\ \frac{b}{\sqrt{1-b^2}}, \text{ где } -1 < b < 1.$$

Решите уравнение:

$$\sin^2 x = \arcsin\sqrt{x}.$$

Так как $0 \leqslant x \leqslant 1$, то в левой и правой частях уравнения записаны взаимно обратные функции, причем равенство достигается только при $x = 0$, поэтому ответ $\{0\}$.

2. Производные обратных тригонометрических функций.

Теорема (без доказательства). Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0 и $f'(x_0) \neq 0$, то ей обратная функция $f^{-1}(y)$ дифференцируема в точке $y_0 = f(x_0)$ и $\left(f^{-1}(y_0)\right)' = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Условие теоремы будет понятным, если вспомнить, что графики взаимно обратных функций симметричны относительно $y = x$, а производная функции в точке равна тангенсу угла наклона касательной. Однако строгое доказательство теоремы достаточно сложное, и мы его приводить не будем.

Согласно этой теореме, производные функций $\arcsin(x)$, $\arccos(x)$, $\operatorname{arctg}(x)$, $\operatorname{arcctg}(x)$ существуют. Для их нахождения воспользуемся теоремой о композиции.

Пусть $-1 \leqslant x \leqslant 1$, тогда

$$\sin(\arcsin x) = x.$$

Вычислим производную левой и правой частей:

$$\left(\sin(\arcsin x)\right)' = \cos(\arcsin x) \cdot (\arcsin x)';$$
$$x' = 1.$$

Поэтому

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\cos(\arcsin x)} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Поскольку $\arccos x = \frac{\pi}{2} - \arcsin x$, то

$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично найдем производные арктангенса и арккотангенса:

$$\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x) = x.$$

Вычислим производную левой и правой частей:

$$\big(\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} x)\big)' = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} \cdot (\operatorname{arctg} x)';$$
$$x' = 1.$$

Поэтому

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{\cos^2(\operatorname{arctg} x)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

Поскольку $\operatorname{arcctg} x = \frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg} x$, то

$$(\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

3. Повторение

Для вычисления производных удобно пользоваться табличными значениями производных основных функций и свойствами произвоной:

$f(x)$	C	x	$\frac{1}{x}$	$\sqrt{x}$	x^α	$\sin x$	$\cos x$	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$f'(x)$	0	1	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\alpha x^{\alpha-1}$	$\cos x$	$-\sin x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
$f(x)$	$\arcsin x$	$\arccos x$	$\operatorname{arctg} x$	$\operatorname{arcctg} x$	e^x	a^x	$\ln x$	$\log_a x$	
$f'(x)$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\frac{1}{1+x^2}$	e^x	$\ln a a^x$	$\frac{1}{x}$	$\frac{1}{x\ln a}$	

$(f(x)+g(x))'$	$(f(x)g(x))'$	$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'$	$(f(g(x)))'$
$f(x)'+g(x)'$	$f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$	$\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{g^2(x)}$	$f'(g)g'(x)$

4. Самостоятельная работа

1) Составьте уравнение касательной к графику функции 2^{1-3x} в точке $x_0 = 0$.

2) Вычислите $g'(\frac{3\pi+2}{6})$, если $g(x) = 4\operatorname{ctg}(1-3x) - x\sin(3x-1)$.

3) Найдите производную функции $f(x) = (2x+4)\sqrt{-4-2x}$ и укажите значения x, при которых она дифференцируема.

5. Домашнее задание Саакян: 527а, 528а, 533а, 537а, 539а, 1214а, 1216а, 1362а, 1383а.