Производная

Средняя скорость. Рассмотрим зависимость какой-то величины от времени $F = F(t)$. Рассмотрев два момента времени t_0 и t_1 ($t_0 < t_1$, мы будем также понимать момент времени t_0 как "начальный"), мы можем вычислить отношение $\frac{F(t_1)-F(t_0)}{t_1-t_0}$. Говорят, что это **средняя скорость** функции $F(t)$ на промежутке времени $[t_0\,;\,t_1]$. При этом величину $\Delta t = t_1 - t_0$ называют **приращением аргумента**, а величину $\Delta F = F(t_1) - F(t_0)$ — соответсвующим ему **приращением функции**. Итак, средняя скорость — это $\frac{\Delta F}{\Delta t}$.

Мгновенная скорость. Проследим за поведением средней скорости при уменьшении Δt, вызванном приближением t_1 к t_0. При таком приближении средняя скорость должна стремиться к величине, характеризующей скорость в самой точке t_0. Это так называемая **мгновенная скорость** функции в точке t_0 — предел $\lim\limits_{t_1\to t_0} \frac{F(t_1)-F(t_0)}{t_1-t_0}$. Это та самая скорость, которую мы имеем в виду, когда говорим, что "мяч бросили со скоростью 3 м/с". В дальнейшем мы займёмся формализацией этого понятия.

Производная функции в точке. Пусть $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0. Тогда при достаточно малых d имеет смысл отношение $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$. Предел $A = \lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$, если он существует, называется **производной** функции $f(x)$ в точке x_0. Вычисление производной называют **дифференцированием**, про наличие у функции производной в точке x_0 говорят, что она **дифференцируема в этой точке**. Производную в точке обознахают штрихом: $f'(x_0)$. В случае существования только одностороннего предела такого рода можно говорить об односторонней (правой или левой) производной.

Примеры: $f(x) = x^2$, $f(x) = |x|$, $f(x) = \sin x$, $f(x) = \sqrt{x}$.

Главная часть приращения функции. Наличие производной можно записать иначе. Если функция дифференцируема в точке x_0, то есть $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0)$, то это значит, что разность $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} - f'(x_0)$ стремится к нулю при $h \to 0$. Обозначим эту разность за $\gamma(h)$. Тогда $\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = f'(x_0) + \gamma(h)$ или $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + h \cdot \gamma(h)$. Последнее слагаемое часто обозначают $o(h)$ (читается "о-малое от h") и понимают как величину, которая стремится к нулю при $h \to 0$, даже если её разделить на h. Выражение $f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot h + o(h)$ представляет собой начало разложения по степеням h значения $f(x_0 + h)$. Производная является в этом разложении коэффициентом линейного члена. Полное разложение по всем степеням называется рядом Тейлора

Пример: почему для малых углов $\sin x \approx x$? Потому что $\sin(x + h) = \sin x + \cos x \cdot h + o(h)$, подставив $x = 0$, получим $\sin h = h + o(h)$.

Аналогично для $a > 0$ и малых h можно применить формулу $\sqrt{a^2 + h} \approx a + \frac{h}{2a}$. Например, по ней $\sqrt{9,1} \approx 3,01(6)$, тогда как в действительности $\sqrt{9,1} = 3,016620\ldots$ — погрешность около $4 \cdot 10^{-5}$, более чем приемлемо для практических вычислений.

Упражнение: Покажите, что дифференцируемая в точке функция непрерывна в этой точке, а обратное неверно.

Касательная к графику. Если в только что выведенной формуле отбросить $o(h)$, останется линейная функция, которая "лучше всего"приближает функцию $f(x)$. (Упражнение: докажите, что никакая другая функция вида $a+bh$ не приблизит $f(x_0+h)$ с точностью до $o(h)$). График этой функции — прямая линия — называется **касательной** к графику $f(x)$ в точке с абсциссой x_0. Угловой коэффициент касательной равен $f'(x_0)$, а условие прохождения через точку $(x_0\,;\,f(x_0))$ однозначно определяют касательную. Вот её уравнение в удобной для запоминания форме:
$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$.

Примеры: напишем уравнение касательной к параболе $f(x) = x^2$ в какой-нибудь точке. Почему у $|x|$ нет касательной в нуле? Есть ли касательная в нуле к графику функции $y = \sqrt{x}$ (можно доопределить её в $\mathbb{R}_-$, положив $\sqrt{x} = -\sqrt{-x}$ для $x < 0$)?

Производная как функция. Многие функции дифференцируемы во всех точках своей области определения или во всяком случае на достаточно большой её части. В такой ситуации говорят о производной как о функции — вычислив $f'(x_0)$ во всех таких точках, мы составляем из этих значений новую функцию $g(x) = f'(x_0)$. Её обычно обозначают просто $f'(x)$, и особой путаницы это не вызывает. Так $(x^2)' = 2x$, а $(\sin x)' = \cos x$ на всей действительной прямой. Запишите $(|x|)'$. Где она определена? Вычислите $(\operatorname{tg} x)'$. На следующем уроке мы вычислим производные ещё нескольких простейших функций и докажем формулы, позволяющие легко дифференцировать широкий класс функций.

10 "В 25 марта, домашнее задание.

1) Напишите уравнение касательной к графику $y = x^3$ в точке этого графика с абсциссой 1. В каких точках эта касательная пересекает график функции?

2) График функции $f(x) = \sqrt{25 - x^2}$, как известно, — верхняя часть окружности радиуса 5 с центром в начале координат. Вычислите непосредственно $f'(3)$. Напишите уравнение касательной к графику этой функции в точке $(3\,;\,4)$ и убедитесь, что она совпадает с обычной, "геометрической"касательной к окружности.

3) Вычислите $(\operatorname{ctg} x)'$.

4) В какой точке нужно провести касательную к графику функции $y = \sqrt{x}$, чтобы она составила угол 30° с осью абсцисс?

5) Углом между графиками функций в точке их пересечения считают угол между касательными к ним в этой точке. Каков угол между $y = x^2$ и $y = \sqrt{x}$ в $(1\,;\,1)$? А в $(0\,;\,0)$?

6) Покажите, что функция $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ (считаем, что $f(0) = 0$) непрерывна, но не дифференцируема в нуле.

7) Имеет ли производную в нуле функция $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ (и здесь считаем, что $f(0) = 0$)?

Уроки №79-80 30.03.10

Производная

Один замечательный предел. Докажем, что $\lim\limits_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = 1$. В самом деле,

$$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(1+t)}{t} = \lim_{t\to 0} \ln(1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln \lim_{t\to 0} (1+t)^{\frac{1}{t}} = \ln e = 1$$

Ключевое место — перестановка местами знаков предела и логарифма — использование непрерывности логарифмической функции.

Производная экспоненты. Если $f(x) = e^x$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim_{h\to 0} \frac{e^h - 1}{h} = e^x$$

Это потому, что $\lim\limits_{h\to 0} \frac{e^h-1}{h} = 1$. В самом деле, заменой $t = e^h - 1$ (условия $h \to 0$ и $t \to 0$ эквивалентны) этот предел сводится к $\lim\limits_{t\to 0} \frac{t}{\ln(1+t)} = 1$.

Для произвольной показательной функции $f(x) = a^x$ вычисления аналогичны:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{a^{x+h} - a^x}{h} = a^x \lim_{h\to 0} \frac{a^h - 1}{h} = a^x \ln a \lim_{h\to 0} \frac{e^{h \ln a} - 1}{h \ln a} = a^x \ln a$$

Производная логарифма. Если $f(x) = \ln x$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) - 1}{h} = \frac{1}{x} \lim_{h\to 0} \frac{\ln\left(1+\frac{h}{x}\right) - 1}{\frac{h}{x}} = \frac{1}{x}$$

Для произвольной логарифмической функции $f(x) = \log_a x$ вычисления аналогичны:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\ln(x+h)}{\ln a} - \frac{\ln x}{\ln a}}{h} = \frac{1}{\ln a} \lim_{h\to 0} \frac{\ln(x+h) - \ln x}{h} = \frac{1}{x \ln a}$$

Производная степенной функции. Если $f(x) = x^\alpha$, то

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = x^\alpha \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{h} = x^{\alpha-1} \lim_{h\to 0} \frac{\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1}{\frac{h}{x}} =$$

$$= x^{\alpha-1} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)} - 1}{\frac{h}{x}} = x^{\alpha-1} \lim_{h\to 0} \frac{e^{\alpha \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)} - 1}{\alpha \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)} \cdot \frac{\alpha \ln\left(1+\frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} = \alpha x^{\alpha-1}$$

Таблица производных. Результаты наших вычислений сведём в таблицу. Её следует помнить.

$f(x)$	$f'(x)$
c	0
x	1
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\operatorname{tg} x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\operatorname{ctg} x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \ln a$
$\ln x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \ln a}$

Домашнее задание повторяется ввиду значительной путаницы с расписанием.