Уроки №71-72 11-12.03.10

Непрерывные функции.

---

1. Приращение аргумента и функции.

Рассмотрим функцию $y = f(x)$. Пусть $x_0 \in D_f$ — фиксированная точка; $x \in D_f$ — произвольная точка.

***Определение* 1.** $\Delta x = x - x_0$ называется приращением аргумента в точке x_0.

Очевидно, что если $x > x_0$, то $x > 0$, а если $x < x_0$, то $x < 0$.

***Определение* 2.** $\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ называется приращением функции в точке x_0.

При заданном x_0 приращение функции зависит только от приращения аргумента.

Из того, что $\Delta x > 0$, не следует $\Delta f(x_0) > 0$. Например, для $f(x) = -x$ это ровно наоборот. Знак приращения функции в точке связан с монотонностью функции в некоторой оскрестности точки.

Теорема 1. Функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$.

Доказательство. $f(x)$ непрерывна в точке $x_0 \iff \lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \iff \left(\lim\limits_{x - x_0 \to 0} f(x)\right) - f(x_0) = 0 \iff \lim\limits_{x - x_0 \to 0}(f(x) - f(x_0)) = 0$, откуда следует утверждение теоремы.

2. Непрерывность некоторых функций.

1) $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $\mathbb{R}_+ = [0; +\infty)$.

Пусть $x_0 \in (0; +\infty)$. Тогда

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)\right) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0} \left(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = 0;$$

так как существует предел знаменателя, отличный от нуля. Вообще говоря, возникает соблазн вычислить этот предел, но это не так просто, потому что, вообще говоря, не доказано, что можно вносить знак предела под корень (более того, сначала нужно доказать непрерывность корня, а мы этим и занимаемся!).

Если же $x_0 = 0$, то докажем, что правосторонний предел равен нулю. Пусть есть $\varepsilon > 0$, возьмем $\delta = \varepsilon^2$, тогда если $0 < \Delta x < \delta$, то $\sqrt{\Delta x} < \varepsilon$, откуда следует, что $\lim\limits_{\Delta x \to 0+0} \sqrt{\Delta x} = 0$, т. е. $\sqrt{x}$ непрерывна в нуле справа.

Следовательно, функция $f(x) = \sqrt{x}$ непрерывна на $(0; +\infty)$.

Поскольку $x^n - y^n = (x - y)k(x, y)$, где $k(x, y)$ — сумма произведений некоторых степеней x и y, то аналогичным образом можно доказать непрерывность корней четной степени на $\mathbb{R}_+$ и нечетной степени на $\mathbb{R}$ (домножая на $k(x_0 + \Delta x, x_0)$).

3. Непрерывность композиции функций.

Докажем теперь теорему о композиции функций.

***Определение* 3.** Если функции $t = g(x)$ и $y = f(t)$ таковы, что $E(g) \subset D(f)$, то функция $y = f(g(x))$ называется композицией функций g и f.

Теорема 2. Если $\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = t_0$ и функция $y = f(t)$ непрерывна в точке t_0, то

$$\lim_{x \to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x \to x_0} g(x)\right) = f(t_0).$$

Докажите теорему самостоятельно.

У теоремы есть прямое следствие:

Следствие. Если функция $t = g(x)$ непрерывна в точке x_0 и функция $y = f(t)$ непрерывна в точке $t_0 = g(x_0)$, то функция $y = f(g(x))$ непрерывна в точке x_0.

Задача: Найдите промежутки непрерывности и асимптоты графика функции $f(x) = \frac{\sqrt{x^2+5}}{3x+1}$ и схематично изобразите график.

4. Непрерывность некоторых функций – продолжение.

2) $f(x) = \sin x$

Возьмем произвольную точку x_0 и рассмотрим предел $\lim\limits_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0)$:

$$\lim_{\Delta x \to 0}(\sin(x_0 + \Delta x) - \sin x_0) = \lim_{\Delta x \to 0}(\sin x_0 \cos \Delta x + \cos x_0 \sin \Delta x - \sin x_0) =$$
$$= \lim_{\Delta x \to 0}(\sin x_0(\cos \Delta x - 1) + \cos x_0 \sin \Delta x) = \sin x_0 \lim_{\Delta x \to 0}(\cos \Delta x - 1) + \cos x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \sin \Delta x =$$
$$= -2 \sin x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \sin^2 \frac{\Delta x}{2} + \cos x_0 \lim_{\Delta x \to 0} \sin \Delta x$$

Соответственно, если бы мы умели доказывать, что $\lim t \to 0 \sin t = 0$, то мы бы доказали непрерывность $\sin x$ в любой точке. Для доказательство этого нам потребуется следующая лемма:

Лемма. Для $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ выполнено $|\sin t| \leqslant t \leqslant |\operatorname{tg} t|$.

Докажите лемму самостоятельно, руководствуясь геометрическими соображениями.

Теперь, воспользовавшись леммой, для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\delta = \min\{\frac{\pi}{2}; \varepsilon\}$, тогда если $0 < |t| < \delta$, то $|\sin t| \leqslant |t| < \varepsilon$. Отсюда следует утверждение о непрерывности синуса в любой точке.

3) $f(x) = \cos x$. Поскольку $\cos x = \sin(\frac{\pi}{2} - x)$, то по теореме о композиции функций $\cos x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

4) $f(x) = \operatorname{tg} x$, $g(x) = \operatorname{ctg} x$. Поскольку $\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x} =$, $\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x} =$, то по теореме о частном непрерывных функций эти функции непрерывны везде, кроме нулей знаменателя. А там, где знаменатель обращается в нуль, получаются вертикальные ассимптоты (т. к. функции становятся бесконечно большими).

5) $f(x) = a^x$. Непрерывность этой функции мы уже доказывали. Чтобы оценить $a^{\Delta x} - 1$, нужно воспользоваться неравенством Бернулли.

5. Обратная функция.

***Определение* 4.** Функция f^{-1} называется обратной к функции f, если $\forall x | f(x) = y$ выполняется, что $f^{-1}(y) = x$.

Некоторые свойства обратных функций:

$D_f = E_{f^{-1}}$, $E_f = D_{f^{-1}}$; $f(f^{-1}(x)) = f^{-1}(f(x)) = x$; графики f и f^{-1}, построенные в одной системе координат, симметричны относительно прямой $y = x$

Чтобы существовала обратная функция, необходимо и достаточно, чтобы различным значениям аргумента соответствуют различные значения функции.

Если функция строго монотонна, то она обратима, а если она четна или периодична, то заведомо необратима.

Теорема 3. (без доказательства) Если функция $y = f(x)$ строго монотонна и непрерывна на D_f, то обратная ей функция $x = f^{-1}(y)$ строго монотонна и непрерывна на E_f.

Из этой теоремы следует непрерывность обратных тригонометрических функций, а также непрерывность логарифма.

6. Некоторые теоремы, помогающие вычислять пределы.

Теорема 4. Теорема о двух милиционерах.

Пользуясь соответствующей теоремой о пределах последовательностей, сформулируйте и докажите эту теорему самостоятельно (как для пределов в точке, так и на бесконечности).

Теорема о первом замечательном пределе: $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

Доказательство. Пусть $x \to 0 + 0$, тогда

$$\sin x < x < \operatorname{tg} x$$
$$\Updownarrow$$
$$1 < \frac{x}{\sin x} < \frac{1}{\cos x}$$
$$\Updownarrow$$
$$\cos x < \frac{\sin x}{x} < 1$$

откуда по лемме о двух милиционерах следует утверждение теоремы.

Вторым замечательным пределом называется

$$\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

Доказательство этого факта мы пока оставим (число e мы определяли как $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$).

7. Решение задач

Найдите пределы:

1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg} x}{x}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} x}{x}$; 5) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg} ax}{x}$; 7) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin(ax)}{\operatorname{arctg}(bx)}$;

2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin x}{x}$; 4) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(ax)}{x}$; 6) $\lim\limits_{x\to 0}\Big(\operatorname{tg}(ax)\operatorname{ctg}(bx)\Big)$; 8) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\dfrac{4x-\pi}{\arcsin(x-\frac{\pi}{4})}$;

9) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}}\left(\dfrac{\sin 4x - 2\cos 2x}{\left(\frac{\pi}{2}-2x\right)^2\cdot\cos 2x}+\dfrac{4x}{\pi}\right)$;

10) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+\sin x-\cos x}{1+\sin 5x-\cos 5x}$;

11) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+\sin 5x}-1}{4x}$;

12) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{1+x^2}-\sqrt[4]{1-2x}}{x+x^2}$;

13) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{\sqrt{x^2-1}}$;

14) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sqrt{x}-1}-\dfrac{3}{x\sqrt{x}-1}\right)$.

В задаче 13 нужно найти промежутки непрерывности, ассимптоты и построить схематично график.

8. Домашнее задание

I группа: Доказать теоремы 2, 4, лемму. Также дорешать все задачи. Следующий урок - с/р, будет доказательство домашних теорем и решение задач на пределы.

II группа: Доказать теоремы 2, 4, лемму, прочитать теорему о первом замечательном пределе. Следующий урок - с/р, будет доказательство домашних теорем и решение задач на пределы.

Ответы: 1) 1; 2) 1; 3) 1; 4) a; 5) a (сводим к первому замечательному пределу); 6) ab; 7) $\frac{a}{b}$ (домножим и разделим на x); 8) 4; 9) 0 (сделаем замену $t = x-\frac{\pi}{4}$); 10) $\frac{1}{5}$; 11) $\frac{5}{8}$; 12) $\frac{8}{21}$; 13) функция четная, непрерывна на $D(f)=(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$; ассимптоты: $x=\pm 1$; $y=\pm x$ при $x\to\pm\infty$ соответственно; выглядит, как две симметричные ветки гиперболы в верхней полуплоскости, зажатые между ассимптотами; 14) 1.

Уроки №73-74 16.03.10

Непрерывные функции

---

1. Самостоятельная работа

1. Докажите, что если $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = t_0$ и функция $y = f(t)$ непрерывна в точке t_0, то

$$\lim_{x\to x_0} f\big(g(x)\big) = f\left(\lim_{x\to x_0} g(x)\right) = f(t_0).$$

---

1. Докажите, что для $t \in (-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2})$ выполнено $|\sin t| \leqslant t \leqslant |\operatorname{tg} t|$.

---

1. Сформулируйте и докажите «теорему о двух милиционерах» о пределе функции в точке.

---

1. Сформулируйте и докажите «теорему о двух милиционерах» о пределе функции на бесконечности.

I вариант

2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x\sqrt{x}+1}{x}$ на непрерывность и асимптоты. Схематически постройте ее график.
Вычислите $(a, b \neq 0)$:

3. $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{arctg}(\pi - 2x)}{\arcsin(\frac{\pi}{2} - x)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{4+\sin ax} - 2}{\operatorname{tg} bx}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} ax)}{\sin(\sin bx)}$;

6. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt[7]{x} - 1}{\sqrt[9]{x} - 1}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2 - 3x^{11} + 2}{x^{50} + 2x^{30} - 3}$.

II вариант

2. Исследуйте функцию $f(x) = \frac{x\sqrt{x}-1}{x}$ на непрерывность и асимптоты. Схематически постройте ее график.
Вычислите $(a, b \neq 0)$:

3. $\lim\limits_{x\to-\frac{\pi}{2}} \dfrac{\arcsin(\frac{\pi}{2} + x)}{\operatorname{arctg}(\pi + 2x)}$;

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{9+\operatorname{tg} ax} - 3}{\sin bx}$;

5. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\sin ax)}{\operatorname{tg}(\operatorname{tg} bx)}$;

6. $\lim\limits_{x\to 5} \dfrac{\sqrt[4]{x+11} - 2}{x - 5}$;

7. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^{100} + 2x^{50} - 3}{x^{20} - 3x^{10} + 2}$.

2. <u>Разбор задач самостоятельной работы и решение задач 1-14</u>

3. <u>Домашнее задание</u>

I группа:

1) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \dfrac{3\sin^2 x - 4\sin x + 1}{2x - \pi}$; 2) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}} \dfrac{\sqrt{2} - \cos 2x - \sin 2x}{(8x - \pi)^2}$; 3) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(\arcsin 2x) \cdot \operatorname{arctg} 2x}{(x - x^2)(\frac{\pi}{2} - \arccos x)}$.

II группа: Дорешать задачи из списка (1-14).