Уроки №69-70 26.02-09.03.10

## *Непрерывные функции.*

---

**1.** Разбор контрольной работы I вариант.

1) Пусть $\varepsilon > 0$. Рассмотрим $\delta = \frac{\varepsilon}{4} > 0$. Тогда для любого $x$ такого, что $0 < |x - x_0| = |x - (-2)| = |x + 2| < \delta$ выполнено:

$$|f(x) - a| = |4x + 3 - (-5)| = |4x + 8| = 4|x + 2| < 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon,$$

что и означает, что $\lim\limits_{x \to -2}(4x + 3) = -5$.

2) $D(f) = \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to +\infty} = 2$, $\lim\limits_{x \to -\infty} = -3$.

3) Если бы при $x = -1$ числитель или знаменатель был бы отличен от нуля, тогда предел был бы равен либо $f(-1)$, либо $\pm\infty$. Поскольку многочлены и в числителе, и в знаменателе обращаются в нуль, они делятся на $x + 1$, значит, можно их поделить, что не повлияет на значение предела; после чего вычислить предел.

4) Числитель и знаменатель нужно домножить на сопряженные выражения, и сократить на множитель, обращающийся в нуль.

5)

$$\lim_{x \to +\infty} \left( \sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2} \right) = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x+1)^2 - (x-1)^2}{\sqrt[3]{(x+1)^4} + \sqrt[3]{(x^2-1)^2} + \sqrt[3]{(x-1)^4}} =$$
$$= \lim_{x \to +\infty} \frac{4x}{x^{\frac{4}{3}} \sqrt[3]{(1 + \frac{1}{x})^4} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x^2})^2} + \sqrt[3]{(1 - \frac{1}{x})^4}} = \lim_{x \to +\infty} \frac{4}{\sqrt[3]{x} \cdot (1 + 1 + 1)} = 0$$

6) $f(x) = \frac{x(x-2)}{(x-2)(x+3)}$. Особые точки — 2 и $-3$, найдем пределы:

$$\lim_{x \to 2} f(x) = \frac{2}{5},$$

поэтому $x = 2$ — выколотая точка,

$$\lim_{x \to -3-0} f(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -3+0} f(x) = -\infty,$$

поэтому $x = -3$ — вертикальная ассимптота.

$$f(x) = 1 - \frac{3}{x+3} \to 1 \text{ при } x \to \pm\infty,$$

поэтому $y = 1$ — горизонтальная ассимптота, причем на $+\infty$ $f(x) < 1$, а на $-\infty$ $f(x) < 1$. Нарисуем ассимптоты, «хвостики», соединим их, и отметим выколотую точку.

7) Например, $f(x) = x + |x| + \frac{1}{x}$.

**2.** Еще парочка задач

1) Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x \to -1}(x^3 + 1) = 0$. Пусть есть

$\varepsilon > 0$. Заметим, что

$$|x^3{+}1| < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon < x^3 + 1 < \varepsilon$$
$$\Updownarrow$$
$$-\varepsilon - 1 < x^3 < \varepsilon - 1$$
$$\Updownarrow$$
$$-\sqrt[3]{\varepsilon+1} < x < \sqrt[3]{\varepsilon-1}$$
$$\Updownarrow$$
$$1 - \sqrt[3]{\varepsilon+1} < x+1 < 1 + \sqrt[3]{\varepsilon-1}$$

Значит, если выберем $\delta = \min\{|1 - \sqrt[3]{\varepsilon+1}|; |1 + \sqrt[3]{\varepsilon-1}|\}$, то при $0 < |x+1| < \delta$ будет выполнено $|x^3+1| < \varepsilon$.

2) Рассмотрим $\lim x \to \infty$ функции $f(x) = \frac{x^4-60}{x^2+8}$. Поскольку $f(x) = x^2 - 8 + \frac{4}{x^2+8}$, т. е. $f(x) = x^2 - 8 + \alpha(x)$, где $\alpha(x)$ — б. м. при $x \to \infty$, то график $f(x)$ на бесконечности стремится к графику параболы $y = x^2 - 8$. Аналогично, если есть $\frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$, и $m \geqslant n$, то график функции на бесконечности приближается к графику многочлена степени $m - n$.

## 3. Домашнее задание

II вариант

**1.** Пользуясь определением предела функции по Коши, докажите, что $\lim\limits_{x\to2}(3x-4) = 2$.

**2.** Укажите область определения функции

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3+2|x|}{4x-1} & \text{при } x \leqslant -1; \\ \dfrac{8x}{2|x|+5} & \text{при } x > -1 \end{cases}$$

и найдите её пределы при $x \to \pm\infty$.

Вычислите:

**3.** $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^3+5x^2-7x+1}{2x^2+3x-5}$; **4.** $\lim\limits_{x\to-3} \frac{\sqrt{x+4}-1}{\sqrt{2x+10}-2}$; **5.** $\lim\limits_{x\to+\infty} \left(\sqrt{(x+1)^3} - \sqrt{(x-1)^3}\right)$.

**6.** Найдите асимптоты графика функции $g(x) = \frac{x^2-x-6}{x^2-4}$ и постройте схематично этот график.

**7.** Приведите пример функции, заданной формулой, которая при $x \to -\infty$ имеет наклонную асимптоту, а при $x \to +\infty$ имеет горизонтальную асимптоту.

Постройте графики функций (*):

**8.** $x \cos \dfrac{1}{x}$; **9.** $x \sin x$; **10.** $x \sin \dfrac{1}{x}$.

## 4. Непрерывные функции

***Определение* 1.** $f(x)$ называется *непрерывной* в точке $x_0$, если $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

***Теорема*** Если функция непрерывна в точке, то она определена в какой-то ее окрестности.

Утверждение теоремы напрямую следует из определения.

***Теорема*** Если $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны в $x_0$, то $(f{+}g)(x)$ и $(f \cdot g)(x)$ непрерывны в $x_0$. Если $g(x_0) \neq 0$, то $\frac{f}{g}(x)$ тоже непрерывна в $x_0$.

Утверждение теоремы следует из соответствующих теорем о пределах.

***Определение* 2.** $f(x)$ называется непрерывной на интервале $(a, b)$, если $f(x)$ непрерывная в любой точке интервала.

***Определение* 3.** $f(x)$ называется непрерывной на отрезке $[a, b]$, если $f(x)$ непрерывная в любой точке интервала $(a, b)$ и $\lim\limits_{x\to a+0} f(x) = f(a)$ и $\lim\limits_{x\to b-0} f(x) = f(b)$.

В случае существования односторонних пределов функцию также называют *непрерывной слева в точке* или *непрерывной справа в точке.*

Если функция непрерывна на интервале, значит, можно провести ее график не отрывая руки.

Непрерывными на своей области определения являются многочлены, показательная функция, логарифмическая, тригонометрические функции, дробно-рациональные.

Не является непрерывной ни в какой точке функция Дирихле:

$$D(x) = \begin{cases} 1, \text{ если } x \in \mathbb{Q}; \\ 0, \text{ иначе.} \end{cases}$$

**5.** Решение задач

Найдите промежутки непрерывности функции:

1) $f(x) = \frac{3x^2-12}{x^3-x^2-2x}$; 2) $f(x) = [x]$.

Ответы: $(-\infty; -1) \cup (-1; 0) \cup (0; 2) \cup (2; +\infty)$; $[n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$. Обратите внимание, что, хотя объединением промежутков непрерывности во втором случае является вся прямая, но сама функция не является непрерывной на всей прямой.

$f(x)$ — непрерывна на всей прямой. Найдите $a$, если

3) $f(x) = \begin{cases} x^2, \text{ если } x < 0; \\ x + a, \text{ если } x \geqslant 0. \end{cases}$ 4) $f(x) = \begin{cases} ax, \text{ если } x \in \mathbb{Q}; \\ \dfrac{x}{a}, \text{ иначе.} \end{cases}$

В первом случае $\lim\limits_{x\to 0-0} f(x) = 0$, $f(0) = a$, поэтому $a = 0$.

Во втором случае, выберем $(x_n) \to r$ такую, что $x_n \in \mathbb{Q}$, $r \notin \mathbb{Q}$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} ax_n = ar$, но $f(r) = \frac{r}{a}$. Поэтому $ar = \frac{r}{a}$, откуда $a = \pm 1$.

5) Найдите $f(x)$, которая определена на всей прямой и непрерывна только в точке 0.

$$f(x) = \begin{cases} x, \text{ если } x \in \mathbb{Q}; \\ \quad -x, \text{ иначе.} \end{cases}$$

6) Найдите $f(x)$, которая определена на всей прямой и непрерывна только в точках 1, 2, 3.

$$f(x) = \begin{cases} (x-1)(x-2)(x-3), \text{ если } x \in \mathbb{Q}; \\ \quad -(x-1)(x-2)(x-3), \text{ иначе.} \end{cases}$$

7) Найдите $f(x)$, которая определена на всей прямой и непрерывна только в целых точках.

$$f(x) = \begin{cases} \{x\}, \text{ если } x \in \mathbb{Q}; \\ \quad -\{x\}, \text{ иначе.} \end{cases}$$

8) Найдите $f(x)$, которая определена на всей прямой и непрерывна только в иррациональных точках.