Уроки №61-62 11-12.02.10

Предел функции

---

1. Предел функции по Гейне

***Определение* 1.** $\lim\limits_{x\to\alpha} f(x)=\beta \Longleftrightarrow \forall (x_n)\to\alpha\ f(x_n)\to\beta$, где $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ или $\alpha,\beta=\pm\infty$ и $x_n\neq\alpha$.

Например, рассмотрим $f(x)=\frac{1}{x}$ и найдем несколько пределов.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0,$$

поскольку из теорем о пределах последовательности следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=0$.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{x}=\frac{1}{2},$$

поскольку из теорем о пределах последовательности следует, что если $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=2$, то $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\frac{1}{2}$.

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\text{ не существует,}$$

поскольку при $x_n=\frac{1}{n}$ получим $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty} n=+\infty$, а при $x_n=-\frac{1}{n}$ — $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{x_n}=\lim\limits_{n\to\infty}(-n)=-\infty$, что противоречит существованию предела по Гейне.

2. Решение задач

1) Известно, что $\lim\limits_{n\to\infty} f\left(\left(\frac{1}{3}\right)^n\right)=0$. Следует ли из этого, что $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=0$? (Нет, т.к. неизвестно, каковы пределы других последовательностей.)

2) Докажите, что $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{2x^2-3}{x^2+1}=2$.

Пусть $(x_n)\to+\infty$, тогда

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2x_n^2-3}{x_n^2+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-\frac{3}{x_n^2}}{1+\frac{1}{x_n^2}}=2.$$

3) Докажите, что $\lim\limits_{x\to\infty}\sin x$ не существует.

Выберем $x_n=\frac{\pi n}{2}$, тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ не существует.

4) Найдите $\lim\limits_{x\to k}[x]$, где $k\in\mathbb{Z}$.

Предела не существует, поскольку для $x_n=k+\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]=k$, а для $x_n=k-\frac{1}{n}$ $\lim\limits_{n\to\infty}[x_n]=k-1$.

3. Некоторые теоремы о пределах

***Теорема* .** $\lim f+\lim g=\lim(f+g)$; $\lim f\cdot\lim g=\lim(f\cdot g)$; $\frac{\lim f}{\lim g}=\lim\frac{f}{g}$ (если $\lim g\neq 0$).

Эти утверждения следуют из аналогичных утверждений для пределов последовательностей. Например, докажем последнее. Пусть существуют пределы f и g. Тогда для любой (x_n) выполнено:

$$\lim\frac{f}{g}=\lim_{n\to\infty}\frac{f(x_n)}{g(x_n)}=\frac{\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)}{\lim\limits_{n\to\infty} g(x_n)}=\frac{\lim f}{\lim g}.$$

Обратите внимание, что из существования предела $\frac{f}{g}$ не следует существование пределов f и g!

Следствия.

$\lim f-\lim g=\lim(f-g)$; $\lim cf(x)=c\lim f(x)$. Утверждения теоремы также можно обобщить на любую конечную сумму или произведение.

4. Решение задач

5) Найдите пределы при $x \to \pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x}{|x|-1}, \text{ при } x \le -5; \\ \dfrac{|x|-|7-x|}{3x+20}, \text{ при } x > -5. \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3x}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{-3}{1-\frac{1}{x}} = -3;$$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x+7-x}{3x+20} = \lim_{x\to+\infty} \frac{7}{3x+20} = 0.$$

6) Найдите $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)}$.

Пределы будут разные в зависимости от степеней P и Q, однако вычисляются одним способом:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^i}{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i x^i} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^{i-n}}{b_n + b_{n-1}\frac{1}{x} + \ldots + b_0\frac{1}{x^n}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum\limits_{i=0}^{m} a_i x^{i-n}}{b_n} = \lim_{x\to\infty} \sum_{i=0}^{m} \frac{a_i}{b_n} x^{i-n}.$$

При $m = n$ получим, что $\lim = \frac{a_m}{b_m}$, при $m > n$ предел равен $+\infty$ или $-\infty$ в зависимости от знака $\frac{a_m}{b_n}$, а при $m < n$ — 0.

5. Предел функции по Коши

***Определение* 2.**

1) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = a$, где $a \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in D(f)$ и $x > (<) M$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$.

2) $\lim\limits_{x\to\pm\infty} = \pm\infty$, если $\forall m\ \exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in D(f)$ и $x > (<) M$ выполнено $f(x) > (<) m$.

3) $\lim\limits_{x\to\alpha} = a$, где $a, \alpha \in \mathbb{R}$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0 | \forall x$ такого, что $0 < |x - \alpha| < \delta$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$.

4) $\lim\limits_{x\to\alpha} = \pm\infty$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, если $\forall m\ \exists \delta > 0 | \forall x$ такого, что $0 < |x - \alpha| < \delta$ выполнено $f(x) > (<) m$.

Докажем эквивалентность определений по Коши и по Гейне для случая 1 (для остальных аналогично).

Коши $\to$ Гейне:

Пусть предел по Коши равен a, т.е. $\forall \varepsilon > 0\ \exists M \in \mathbb{R} | \forall x \in D(f)$ и $x > M$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$. Рассмотрим любую последовательность (x_n) такую, что $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Тогда $\forall M_1\ \exists N \in \mathbb{N} | \forall n \geqslant N$ выполнено $x_n > M_1$. Выберем $M_1 \geqslant M$, тогда $\forall n \geqslant N$ выполнено $|f(x_n) - a| < \varepsilon$, что и означает, что $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = a$.

Гейне $\to$ Коши:

Пусть предел по Гейне равен a, тогда предположим, что определение по Коши не выполнено, т.е. $\exists \varepsilon_0 > 0$ такое, что $\forall M \in \mathbb{R}\ \exists x > M,\ x \in D(f)$ такой, что $|f(x) - a| > \varepsilon_0$. Тогда рассмотрим $(M_n) \to +\infty$, и для каждого M_n выберем $x_n \in D(f)$ такое, что $|f(x_n) - a| > \varepsilon_0$. Получим последовательность (x_n), $(x_n) \to +\infty$ (т.к. $x_n \geqslant M_n$), а $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) \neq a$, что противоречит определению предела по Гейне. Следовательно, наше предположение неверно, и предел по Коши существует и равен a.

***Определение* 3.** Функция $\alpha(x)$ называет бесконечно малой при $x \to \beta$, где $\beta \in \mathbb{R}$ или $\beta = \pm\infty$, если $\lim\limits_{x\to\beta} \alpha(x) = 0$.

***Теорема* .** Сумма и произведение конечного числа бесконечно малых — бесконечно малая функция, предел суммы бесконечно малой и константы равен этой константе.

Соответственно, если предел функции равен $c \in \mathbb{R}$, то эту функцию можно представить в виде суммы c и бесконечно малой.

***Определение* 4.** Функция $F(x)$ называется бесконечно большой при $x \to \beta$, если $\frac{1}{F(x)}$ — бесконечно малая при $x \to \beta$.

***Теорема* .** $F(x)$ — бесконечно большая при $x \to \beta \iff \lim\limits_{x\to\beta} = \pm\infty$.

***Теорема* .** Произведение конечного числа бесконечно больших бесконечно велико; сумма бесконечно большой и постоянной бесконечно велика.

6. Домашнее задание

Саакян 443б, 451б, 453б, 456б, 457б, 458б, 459а.

Уроки №63-64 17.02.10

Предел функции. Односторонние пределы функции в точке

---

1. Решение задач

1) Докажите, что $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{P_m(x)}{Q_n(x)} = \frac{P_m(x_0)}{Q_n(x_0)}$, если $Q_n(x_0) \neq 0$.

2) Найдите a и b, если $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{ax^3+7}{3x^2-4} + b(x-1)\right) = 2$.

Найдите пределы:

3) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sqrt[3]{(x+1)^2} - \sqrt[3]{(x-1)^2})$; 4) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^4-1}{x^2-1}$; 5) $\lim\limits_{x\to-\frac{2}{3}} \frac{3x^2-x-2}{6x^2+10x+4}$; 6) $\lim\limits_{x\to4} \frac{2-\sqrt{x}}{x-4}$;

7) $\lim\limits_{x\to0}(x\sin\frac{1}{x})$; 8) $\lim\limits_{x\to4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; 9) $\lim\limits_{x\to1} \frac{|-x^2-2x+3|}{|x-1|}$; 10) $\lim\limits_{x\to1} \frac{x^{101}-5x+4}{x^{202}-6x+5}$.

2. Односторонние пределы

Важное замечание о пределе функции. Рассмотрим функции $f_1(x) = x+1$, $f_2(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ и $f_3(x) = \begin{cases} x+1, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Все эти функции имеют предел при $x \to 1$, равный 2. Важным моментом является то, что в определении по Гейне нельзя брать $x_n = x_0$, а в определении по Коши обязательно $0 < |x - x_0|$!

***Определение* 5.** Проколотой δ-окрестностью числа x_0 (или просто проколотой окрестностью) называется множество $(x_0-\delta; x_0+\delta) \setminus \{x_0\}$.

***Определение* 6.** Промежутки $(x_0-\delta; x_0)$ и $(x_0; x_0+\delta)$ соответственно называются левой и правой полуокрестностями числа x_0.

Рассмотрим функцию из домашнего задания $f(x) = \frac{|2-x-x^2|}{x-1}$ и ее график. $f(x) = \frac{|x+2|\cdot|x-1|}{x-1}$. Эта функция не имеет предела при $x \to 1$, поскольку все точки левой полуокрестности равны $(-|x+2|)$, а в любой точке правой полуокрестности — $|x+2|$. Для таких функций вводится понятие одностороннего предела.

***Определение* 7.**

1) $\lim\limits_{x\to x_0-0} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 | \forall x \in (x_0-\delta; x_0)$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$.

2) $\lim\limits_{x\to x_0+0} f(x) = a \iff \forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 | \forall x \in (x_0; x_0+\delta)$ выполнено $|f(x) - a| < \varepsilon$.

***Теорема* .** $\lim\limits_{x\to x_0} = a \iff \lim\limits_{x\to x_0-0} = \lim\limits_{x\to x_0+0} = a$.

3. Разбор домашнего задания

443: $\lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{4x-1}{2\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}} \frac{(2\sqrt{x}-1)(2\sqrt{x}+1)}{2\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to\frac{1}{4}}(2\sqrt{x}+1) = 2$.

451: Пусть есть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \varepsilon^2$, тогда если $|x-0| < \delta$, то $|\sqrt{x}\cos(x+1) - 0| \leqslant |\sqrt{x}| < \varepsilon$, ч.т.д.

453: Пусть есть $\varepsilon > 0$. Выберем $\delta = \frac{\varepsilon^2}{9}$, тогда если $|x-0| < \delta$, то $|\frac{x^2-2x}{\sqrt{|x|}} - 0| = |\frac{x}{\sqrt{|x|}}(x-2)| = \sqrt{|x|} \cdot |x-2| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} \cdot 3 = \varepsilon$.

456: $\lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x+7}-4}{\sqrt{x}-3} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{(\sqrt{x+7}-4)(\sqrt{x+7}+4)(\sqrt{x}+3)}{(\sqrt{x}-3)(\sqrt{x}+3)(\sqrt{x+7}+4)} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{(x+7-16)(\sqrt{x}+3)}{(x-9)(\sqrt{x+7}+4)} = \lim\limits_{x\to 9} \frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x+7}+4} = \frac{3}{4}$.

457: $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt[3]{x}-1}{\sqrt{x}-1} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt[3]{x^2}+\sqrt[3]{x}+1} = \frac{2}{3}$.

458: $\lim\limits_{x\to 2} \frac{|x^2-6x+8|}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{|x-2|\cdot|x-4|}{|x-2|} = \lim\limits_{x\to 2} |x-4| = 2$.

4. Домашнее задание

1) Докажите, что $f(x) = \sqrt[n]{x}$; $f(x) = a^x$; тригонометрические функции обладают свойством $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$.

2) Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)(1+2x)(1+3x)-1}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{x^2-5x+6}{x^2-8x+15}$; в) $\lim\limits_{x\to -1} \frac{x^3-2x-1}{x^5-2x-1}$; г) $\lim\limits_{x\to 2} \frac{x^3-2x^2-4x+8}{x^4-8x^2+16}$;

3) Вычислите: а) $\lim\limits_{x\to 4} \frac{\sqrt{1+2x}-3}{\sqrt{x}-2}$; б) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{\sqrt{x+13}-2\sqrt{x+1}}{x^2-9}$; в) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{3}{1-\sqrt{x}} - \frac{3}{1-\sqrt[3]{x}}\right)$;
г) $\lim\limits_{x\to +\infty} x(x+\sqrt{x^2+2x} - 2\sqrt{x^2+x})$.