Уроки №49-50 12.01.10

Логарифмические уравнения

---

1. Решение задач

Решите уравнения:

1) $\log_2(x^2+4)-\log_2 x = 4x - x^2 - 2$

Преобразуем левую часть и оценим ее по неравенству Коши:

$$\log_2(x^2+4)-\log_2 x = \log_2\frac{x^2+4}{x} = \log_2(x+\frac{4}{x}) \geqslant \log_2(2\sqrt{x\cdot\frac{4}{x}}) = 2$$

(поскольку $x>0$). Оценим правую часть:

$$4x-x^2-2 = 2-(x-2)^2 \leqslant 2$$

Поэтому если решение существует, то при подстановке его в уравнение правая и левая части должны быть равны двум. Таким образом, уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \log_2(x+\frac{4}{x}) = 2; \\ 2-(x-2)^2 = 2. \end{cases}$$

2) $\log_2 x + \log_2(4x-x^2-1) = 1.$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} x>0; \\ x^2-4x+1<0; \\ x^3-4x^2+x+2=0. \end{cases}$$

Корень $x=1$ кубического уравнения легко угадывается. При делении на $x-1$ получим квадратное уравнение с корнями $\frac{3\pm\sqrt{17}}{2}$. Меньший корень, очевидно, посторонний, а для проверки большего корня нужно либо подставить его во второе неравенство, либо решить второе неравенство (оно тоже будет иметь иррациональные корни), и сравнить его с границами получившихся промежутков. В любом случае, проверка обязательна!

3) $\log_2^2(\sin x\cos x) = \log_2\sin^2 x\cdot\log_2\cos^2 x.$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x\cos x>0; \\ (\log_2|\sin x| + \log_2|\cos x|)^2 = 4\log_2|\sin x|\log_2|\cos x|. \end{cases}$$

Ответ: $x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in\mathbb{Z}.$

4) $\log_2(\cos 2x+\cos\frac{x}{2}) + \log_{\frac{1}{2}}(\sin x+\cos\frac{x}{2}) = 0$

Уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} \sin x+\cos\dfrac{x}{2}>0; \\ \log_2\dfrac{\cos 2x+\cos\frac{x}{2}}{\sin x+\cos\frac{x}{2}} = 0. \end{cases}$$

Поскольку знаменатель дроби не равен нулю, на него можно домножить обе части и получить равносильную систему:

$$\begin{cases} \sin x+\cos\dfrac{x}{2}>0; \\ \sin x = \cos 2x. \end{cases}$$

Нужно найти корни второго уравнения на отрезке длиной в период, после чего подставить их в неравенство и проверить, выполняется ли оно. Хитрость заключается в том, что период данного уравнения — не 2π, а 4π, поэтому удобнее располагать корни не на круге, а на отрезке прямой $[0; 4\pi]$.

2. Классная работа, плавно переходящая в домашнюю

Решите уравнения:

1) $\log_4 x^2 + \log_{x^6} 64 = 2$; **Ответ:** $\{2; -2\}$;

2) $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x}\sqrt{x} = 0$; **Ответ:** $\{1; 4; \frac{1}{\sqrt{2}}\}$;

3) $\sqrt{3}\cdot x^{2\log_3 x - 1} = 3^{\frac{3}{2}\log_3 x}$; **Ответ:** $\{3; \sqrt[4]{3}\}$;

4) $\frac{x}{18} = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log_x 12}$; **Ответ:** $\{12; \frac{3}{2}\}$;

5) Сравните: $\log_2 3 + \log_3 2$ и 2; **Ответ:** $\log_2 3 + \log_3 2 > 2$;

Решите уравнения:

6) $\log_3 x^3 = 15 - x$; **Ответ:** $\{9\}$;

7) $x^{\lg 81} - 9^{\lg x} = 6$; **Ответ:** $\{\sqrt{10}\}$;

8) $\frac{1+2\log_9 2}{\log_9 x} - 1 = 2\log_x 3\cdot\log_9(12-x)$; **Ответ:** $\{6\}$;

9) $15^{\log_5 3}\cdot x^{\log_5 45x} = 1$. **Ответ:** $\{\frac{1}{3}; \frac{1}{15}\}$.

Уроки №51-52 14.01.10

Логарифмические уравнения

---

1. Разбор домашнего задания

1) Задача решается, используя неравенство Коши. Главное, при переходе от x^2 к x не забыть про модуль.

2) При переходе к log по основанию x нужно не забыть проверить, что $x = 1$ является корнем. Лучше, чтобы не допускать таких ошибок, переходить к логарифму по основанию 2 или 4.

3) Задача решается логарифмированием по основанию 3 обеих частей.

4) Здесь можно брать логарифм по основанию x, т.к. в любом случае в уравнении остаётся $\log_x 12$. Дальше можно заметить, что $\frac{2}{3} = \frac{12}{18}$, и использовать разложение на множители.

6) Левая часть — монотонно возрастающая непрерывная функция, а правая часть — монотонно убывающая непрерывная функция, единственное пересечение легко угадать.

7) Если помнить формулу $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$, решение становится очевидным.

2. Решение задач

1) $x^2\log_3 x^2 - (2x^2+3)\log_9(2x+3) = 3\log_3\frac{x}{2x+3}$

Заметим, что x должен быть больше нуля. Поэтому упростим уравнение и выполним разложение на множители: $(2x^2-3)\left(\log_3 x^2 - \log_3(2x+3)\right) = 0$. С учётом ОДЗ получим ответ: $\{\sqrt{\frac{3}{2}}; 3\}$.

2) $\sqrt{4 + 2\log_2\left(1 - \frac{8x}{(2x+1)^2}\right)} = \log_2\frac{2x+1}{2x-1} + 2\log_2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$.

Внесем по один знак логарифма слева и справа, получим:

$$2\sqrt{\log_2\left(2\cdot\frac{2x-1}{2x+1}\right)} = -\log_2\left(2\cdot\frac{2x-1}{2x+1}\right),$$

что возможно только при $\log_2\left(2\cdot\frac{2x-1}{2x+1}\right) = 0$.

3) $\frac{3}{2}\log_{\frac{1}{4}}(x+2)^-3 = \log_{\frac{1}{4}}(4-x)^3 - \log_4(x+6)^3$.

Уравнение равносильно системе неравенств и квадратного уравнения с модулем.

4) $\log_3\left(\frac{3}{x}\right)\cdot\log_2 x-\log_3\left(\frac{x^3}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{2}+\log_2\sqrt{x}$.

Уравнение сначала упрощается, потом логарифмы приводятся к одному основанию.

5) Найдите произведение корней уравнения:

$$(5x)^{4\lg\frac{x}{2}+1}=1978x^5.$$

После логарифмирования по основанию 10 получаем квадратное уравнение относительно $\lg x$. Сумма корней этого уравнения является логарифмом произведения корней исходного уравнения. Таким образом, нужно найти сумму корней по теореме Виета, после этого получить ответ к задаче. Однако, в условии теоремы Виета требуется существование корней, поэтому необходимо также доказать, что дискриминант уравнения не отрицателен.

6) Решите систему уравнений: (**Ответ:** $(6;2)$.)

$$\begin{cases}\log_2(x-y)=5-\log_2(x+y);\\ \dfrac{\lg x-\lg 4}{\lg y-\lg 3}=-1.\end{cases}$$

3. Домашнее задание

1) Саакян 1447, 1453;

Решите уравнения:

2) $\left(\sqrt{4-\sqrt{15}}\right)^x+\left(\sqrt{4+\sqrt{15}}\right)^x=8$; **Ответ:** $\{2;-2\}$;

3) $|x-3|^{x^2-x}=(x-3)^2$; **Ответ:** $\{-1;2;4\}$;

4) $(2+\sqrt{3})^{x^2-2x+1}+(2-\sqrt{3})^{x^2-2x-1}=\frac{4}{2-\sqrt{3}}$; **Ответ:** $\{1;1\pm\sqrt{2}\}$;

5) $\frac{1}{4}\cdot x^{\frac{1}{2}\log_2 x}=2^{\frac{1}{4}\log_2^2 x}$; **Ответ:** $\{4^{\pm\sqrt{2}}\}$;

6) $\log_a(64\sqrt[24]{2^{x^2-40x}})=0$; **Ответ:** При $a<0$ или $a=1$ уравнение не имеет смысла, в других случаях $\{4;36\}$;

7)

I группа: Решите систему: (**Ответ:** $\{(\frac{1}{9};13);(3;9)\}$;)

$$\begin{cases}x^{\log_3 y}+2y^{\log_3 x}=27;\\ \log_3 y-\log_3 x=1;\end{cases}$$

II группа: задание 5 из классной работы.

8)

I группа:

Решите систему: (**Ответ:** $\{(\frac{1}{4};13)\}$;)

$$\begin{cases}3^{\lg x}=4^{\lg y};\\ (4x)^{\lg 4}=(3y)^{\lg 3}.\end{cases}$$

II группа: задание 6 из классной работы.