Показательные уравнения

1. Общий вид показательного уравнения

Уравнение вида

$$\big(u(x)\big)^{f(x)} = \big(u(x)\big)^{g(x)}$$

называется *показательным* уравнением.

Это уравнение равносильно совокупности:

$$\left[\begin{array}{l} \begin{cases} u(x) > 0; \\ u(x) \neq 1; \\ f(x) = g(x); \end{cases} \\ \begin{cases} u(x) = 1; \\ f(x),\ g(x) \text{ определены.} \end{cases} \end{array}\right.$$

Значения переменной, при которых $u(x) \leqslant 0$, *не принято* считать корнями данного уравнения.

2. Решение задач

Решите уравнение:

1) $\sqrt[4]{|x-3|^{x+1}} = \sqrt[3]{|x-3|^{x-2}}$

Представляем в виде совокупности и решаем.

Ответ: $\{2; 4; 11\}$.

Замечание 1: $x = 3$ не является корнем данного уравнения ввиду того, что a^x определена для $a > 0$.

Замечание 2: при $x = 2$ и $x = 4$ нужно обязательно *проверить*, что показатели степеней определены.

Решите уравнение:

2) $3 \cdot 4^x + \frac{1}{3} \cdot 9^{x+2} = 6 \cdot 4^{x+1} - \frac{1}{2} \cdot 9^{x+1}$.

После упрощения получаем: $\frac{63}{2} \cdot 9^x = 21 \cdot 4^x$, откуда

$$\left(\frac{9}{4}\right)^x = \left(\frac{9}{4}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

По свойству показательной функции отсюда следует, что $x = -\frac{1}{2}$.

Решите уравнение:

3) $3 \cdot 16^x - 5 \cdot 36^x + 2 \cdot 81^x = 0$.

Один из способов решения — поделить обе части на 9^x, так как $9^x > 0$.

Получим квадратное уравнение: $3 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^{2x} - 5 \cdot \left(\frac{4}{9}\right)^x + 2 = 0$.

Ответ: $\{0; \frac{1}{2}\}$.

4) 4.19 (Квант)

5) 4.20 (Квант)

3. Домашнее задание

из Кванта: 4.13а, 4.18, 4.22б, 4.23, 4.27

4. Контрольная работа по показательной и логарифмической функции

При доказательстве утверждений разрешается пользоваться только теми фактами, которые описаны в условии. Если в условии сказано, что можно пользоваться определением, то теорему о корректности определения также можно считать доказанной. Если для доказательства требуются еще какие-либо свойства показательной или логарифмической функции, их необходимо доказывать. Все доказательства должны быть понятными и подробными.

Часть I.

1. Пользуясь определением арифметического корня и считая свойства степени с целым показателем доказанными, докажите, что $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$.

2. Считая свойства степени с целым показателем и свойства арифметического квадратного корня доказанными, пользуясь определением степени с рациональным показателем, докажите, что $a^x > a^y$ для всех $a > 1$, $a \in \mathbb{R}$, $x > y > 0$, $x, y \in \mathbb{Q}$.

3. Считая доказанными свойства показательной функции и пользуясь определением логарифма докажите, что $\log_{a^c} b = \frac{1}{c}\log_a b$, где $c \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a, b > 0$, $a \neq 1$.

Часть II.

4. Считая доказанными свойства степени с рациональным показателем и пользуясь определением показательной функции, докажите, что $(a^x)^y = a^{xy}$, где $a > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}$.

5. Считая доказанными свойства степени с целым показателем и пользуясь аксиомой Дедекинда, докажите теорему о существовании и единственности арифметического корня из положительного числа.

Уроки №41-42 17.12.09

Логарифмические уравнения

---

1. Вопросы по домашнему заданию.

В номере 4.23 опечатка, там в левой степени должно быть $+2$, а не $+3$.

В номере 4.18 получается уравнение четвёртой степени, в котором легко угадывается корень $t = 1$ и менее легко корень $t = 5$.

2. Показательные уравнения

Квант: 4.28а, 4.29а.

В номере 4.28 нужно действовать строго по алгоритму, определенному в начале прошлого урока для решения показательных уравнений.

В номере 4.29а нужно поделить обе части на 5^x и посмотреть на график получившейся левой части. Функция является суммой двух строго убывающих, поэтому каждое свое значение она принимает только один раз, а единственный корень уравнения легко угадать.

3. Общий вид логарифмического уравнения

Для решения уравнений нам понадобится следующее свойство логарифмов:

$$\log_a b = \log_a c \quad \Leftrightarrow \quad b = c, \qquad \text{где } a, b, c > 0, \quad a \neq 1.$$

Это свойство очевидно выполняется справа налево, но менее очевидно в обратную сторону. Тем не менее, его несложно доказать. На этом свойстве и основано решение логарифмических уравнений.

Уравнение вида

$$\log_{k(x)} f(x) = \log_{k(x)} g(x)$$

называется *логарифмическим* уравнением.

Это уравнение равносильно системе:

$$\left\{\begin{array}{ll} k(x) > 0; & (1) \\ k(x) \neq 1; & (2) \\ f(x) > 0; & (3) \\ g(x) > 0; & (4) \\ f(x) = g(x). & (5) \end{array}\right.$$

Заметим, что одно из двух условий (3) или (4) является лишним, поскольку выполнено (5). Какое именно условие выбрать, как правило, определяется сравнительной сложностью решения соответствующих неравенств.

Рассмотрим также следующий частный случай логарифмического уравнения:

$$\log_{k(x)} f(x) = b$$

Это уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases} k(x) > 0; & (6) \\ k(x) \neq 1; & (7) \\ f(x) > 0; & (8) \\ k^b(x) = f(x). & (9) \end{cases}$$

Здесь лишним является условие (8), поскольку выполнено (9).

4. Решение задач

Решите уравнения:

1) $\log_3(x^2+x-2)=2$ $\left(\{\frac{-1\pm3\sqrt{5}}{2}\}\right)$;
2) $0,2\log_x\frac{1}{32}=-0,5$ $\left(x=4\right)$;
3) $\log_{x-1}3=2$ $\left(x=1+\sqrt{3}\right)$;
4) $\log_{\log_3 x}3=2$ $\left(x=3^{\sqrt{3}}\right)$;

5) Решите уравнение: $\log_5(x^4+5)+\log_5(x^2+25)=\frac{3}{2}$.

Заметим, что $x^4+5\geqslant 5 \Rightarrow \log_5(x^4+5)\geqslant 1$ и $x^2+25\geqslant 25 \Rightarrow \log_5(x^2+25)\geqslant 2$, поэтому уравнение не имеет решений.

6) Решите уравнение: $\lg(2x-5)^2=0$.

Есть большой соблазн избавиться от квадрата вынесением двойки в качестве множителя перед логарифмом. Однако в этом случае теряется корень $x=2$. Почему так получается? Дело в том, что преобразование $\log_a xy=\log_a x+\log_a y$ сужает область определения, поскольку $xy>0$ выполнено не только при $x>0$, $y>0$. Поэтому при решении уравнений используют свойство

$$\log_a xy=\log_a|x|+\log_a|y|.$$

Решите уравнения:

7) $3\lg x^2-\lg^2(-x)=9$ $\left(x=-1000\right)$;
8) $\log_3(x^2-3x-5)=\log_3(7-2x)$ $\left(x=-3\right)$;
9) $\lg(x+4)+\lg(2x+3)=\lg(1-2x)$ $\left(x=-1\right)$;
10) $\lg\sqrt{x-5}+\lg\sqrt{2x-3}+1=\lg 30$ $\left(x=6\right)$;
11) $x^{\lg x}=x^{100}$ $\left(\{1;10^{100}\}\right)$;
12) $\log_5(x^2-11x+43)=2$ $\left(\{2;9\}\right)$;

13) Решите уравнение:

$$\frac{1}{5-4\lg x}+\frac{4}{1+\lg x}=3.$$

Здесь выполняется замена, все приводится к общему знаменателю и решается как обычное рациональное уравнение. Ответ: $\{10;\sqrt{10}\}$.

14) Решите уравнение:

$$\log_{x^2+6x+8}\left(\log_{2x^2+2x+3}(x^2-2x)\right)=0.$$

Здесь сначала записывается система для внешнего логарифма, а потом новое уравнение тоже преобразуется в систему. Решение сводится к решению обычного квадратного уравнения. Неравенства лучше не решать, а просто подставить корни квадратного уравнения и проверить. Ответ: $\{-1\}$.

15) Решите уравнение:

$$\lg(8-10x-12x^2)=3\lg(2x-1).$$

У кубического уравнения легко угадывается корень $\frac{1}{2}$ (или можно разложить многочлен на множители), а оставшийся квадратный трёхчлен не имеет корней. Однако значение $x=\frac{1}{2}$ не удовлетворяет условию $2x-1>0$. Поэтому ответ: $\varnothing$.

5. Домашнее задание

из Кванта: 4.30г, 4.31в, 4.32а, 4.33а, 4.36, 4.38