Решение уравнений и неравенств различными способами

1. Разбор домашнего задания

1) $\dfrac{cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3\operatorname{tg} x$

$\left(x \in [\dfrac{5\pi}{12} + \pi k; \dfrac{13\pi}{12} + \pi k] \setminus \{\dfrac{\pi}{2} + \pi k\},\ k \in \mathbb{Z}\right)$;

2) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$

$\left(x \in (-\dfrac{\pi}{2} + \pi k; -\dfrac{3\pi}{8} + \pi k) \cup (-\dfrac{\pi}{8} + \pi k; \pi k) \cup (\dfrac{\pi}{8} + \pi k; \dfrac{3\pi}{8} + \pi k),\ k \in \mathbb{Z}\right)$

2. Решение задач

1) Решите уравнение: $1 + \cos 2x \cos 3x = \frac{1}{2}\sin^2 3x$.

После преобразования получаем $\sin^2 x + (\cos 2x + \cos 3x)^2 = 0$, откуда каждое из слагаемых равно нулю.

2) Решите уравнение: $\sin x \sin 5x = 1$.

Поскольку синусы изменяются в пределах отрезка $[-1; 1]$, оба множителя равны либо 1, либо -1. Решение уравнений основано на *оценке* значений выражений.

3) Решите уравнение: $\sin 2x = \sin^4 x + \cos^4 x$.

Ответ: $x = \frac{(-1)^k}{2}\arcsin(\sqrt{3} - 1) + \frac{\pi k}{2},\ k \in \mathbb{Z}$. Уравнение решается *сведением к квадратному уравнению.*

4) Решите уравнение: $\frac{\sin 6x}{\sin 2x + \sqrt{3}\cos 2x} = 0$.

5) Между каким двумя соседними корнями уравнения $\sqrt{3}\sin 2x - \cos 2x = 1$ заключено число $\frac{25\pi}{3}$?

4 и 5 уравнения решаются с помощью метода *вспомогательного аргумента.*

Ответ к пятой задаче: $\frac{49\pi}{6}$ и $\frac{17\pi}{2}$.

6) Сколько целых значений может принимать выражение $3\sin^2 x + 5\sin 2x$?

После упрощения и введения вспомогательного аргумента получим:

$$A = 3\sin^2 x + 5\sin 2x = \frac{3}{2}(1 - \cos 2x) + 5\sin 2x = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{109}}{2}\cos(2x + \varphi),$$

где $\varphi = \arccos\frac{3}{\sqrt{109}} = \arcsin\frac{10}{\sqrt{109}}$.

Поскольку $\cos(x)$ — непрерывная функция и принимает все значения от -1 до 1, легко оценить, что целые значения A лежат в пределах от -3 до 6, т.е. A может принимать 10 целых значений.

7) Решите уравнение: $3\sin x + \cos x - 1 = 0$.

Уравнение можно решить введением вспомогательного аргумента, но мы решим его *сведением к алгебраической системе*:

Пусть $a = \sin x$, $b = \cos x$, тогда

$$3\sin x + \cos x - 1 = 0 \Longleftrightarrow \begin{cases} 3a + b - 1 = 0; \\ a^2 + b^2 = 1. \end{cases}$$

Ответ: $x \in \{2\pi k; \pi - \arcsin\frac{3}{5} + 2\pi k\},\ k \in \mathbb{Z}$.

8) Решите уравнение: $\sqrt{-3\sin 2x} = -2\sin 2x - \sin x + \cos x - 1$.

3. Домашнее задание

I группа:

Решить уравнения:

1.1) $\sin x + \sin 2x - \cos x = 1$;   (решить сведением к алгебраической системе)

1.2) $\cos 2x - \sin 2x = 1 - \sin x - \cos x$;

1.3) $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$;

1.4) $\sin y + \cos 3y = 1 - 2\sin^2 y + \sin 2y$;

1.5) $\sin x - 2\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

Из Саакяна 1307, 1309.

На пятёрку: решите уравнение:

$$2\sqrt{3}\sin 5x - \sqrt{3}\sin x = \cos 24x \cos x + 2\cos 5x - 6.$$

II группа:

Задачи 5, 7. Решить уравнения:

2.1) $\sin x - 2\cos x = -\dfrac{\sqrt{10}}{2}$;

2.2) $2\cos x + \sin 2x - \sin x = 1$;   (решить сведением к алгебраической системе)

2.3) $\cos 2x - \sin 2x = 1 - \sin x - \cos x$;

2.4) $\cos 3x \cos 4x + \sin 2x \sin 5x = \dfrac{1}{2}(\cos 2x + \cos 4x)$.

Из Саакяна 1307, 1309.

Ответы: 1.1) $\{\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k; \pi + 2\pi k\}$; 1.2 и 2.3) $\{-\frac{\pi}{4} + \pi k; \frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{5\pi}{6} + 2\pi k\}$; 1.3 и 2.4) $\{\frac{2\pi k}{5}; \frac{\pi}{2} + \pi k\}$; 1.4 $\{2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k; \frac{\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}\}$; 1.5 и 2.1 $-\arccos\frac{2}{\sqrt{5}} \pm \frac{\pi}{4} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.