Уроки №21-22 16.10.09

Решение неравенств

---

1. Проверка д/з Проверочная работа (2 задачи) - 8 минут.

2. Методы решения неравенств Перечислите все преобразования, которые помогают решить неравенства. Вспомните методы, которые используются для решения неравенств. На какие моменты всегда нужно обращать внимание? Где может закрасться ошибка?

3. Решение задач

Найдите целое решение неравенства:

$$1)\ \frac{2x^2+x+2}{x^2-1}<0.$$

Решите неравенства:

2) $\dfrac{5x+4}{5x^2-6x+1}\leqslant\dfrac{1}{x-2}$;

3) $|x^2-1|<x^2-|x|+1$;

4) $\sqrt{5-x^2}\geqslant x+1$;

5) $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leqslant 2$;

6) $\sqrt{x^2-9x+20}\leqslant\sqrt{2x-1}-\sqrt{x^2-16}$;

7) $\sqrt{x^2-5}>|x-1|$.

8) При каком m область определения функции $f(x)=\sqrt{2mx-x^2-5}+\sqrt{1-x}$ состоит из одной точки?

9) Найдите все x, при которых неравенство

$$(2c-6)x^2+(32-10c)x-(8+c)<0.$$

4. Домашнее задание 1. (на пятёрку) решите неравенства:

1) $\dfrac{\sqrt{1-x^3}-1}{1+x}\leqslant x$;

2) $\sqrt{x^3+3x}>x^2-6x+3$;

2. Саакян 1413, 1418, 1430.

Уроки №23-24 30.10.09

Решение тригонометрических неравенств методом интервалов

---

1. Метод интервалов на примере конкретных неравенств

1) Решите неравенство: $\sin 2x > \cos x$.

Обозначим $f(x) = \sin 2x - \cos x$. $f(x)$ — периодическая функция с периодом 2π. Значит, мы можем решить неравенство $f(x) > 0$ на промежутке длиной 2π и обобщить решение на всю прямую. Разложим выражение на множители:

$$f(x) = 2\sin x\cos x - \cos x = 2\cos x(\sin x - \frac{1}{2}).$$

Нули функции:

$$\left[\begin{array}{l}\cos x = 0;\\ \sin x = \dfrac{1}{2}.\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z};\\ x = (-1)^k\dfrac{\pi}{6} + \pi k,\ k\in\mathbb{Z}.\end{array}\right.$$

Нанесём точки на круг (от 0 до 2π) — это будут точки $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{2}$, $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{3\pi}{2}$. Поскольку неравенство нестрогое, точки не закрашиваем. Эти четыре точки разбивают круг на пять интервалов, каждый их которых является промежутком знакопостоянства. Рассмотрим, например, $f(\frac{\pi}{4})$:

$$f(\frac{\pi}{4}) = \sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{\sqrt{2}}{2} > 0.$$

Рассмотрим изменение знака функции при возрастании аргумента от $\frac{\pi}{4}$. Сначала и $\cos x$, и $(\sin x - \frac{1}{2})$ — непрерывные функции — будут того же знака, что и при $x = \frac{\pi}{4}$. В точке $\frac{\pi}{2}$ $\cos x$ обратится в нуль, а дальше этой точки поменяет знак, а $(\sin x - \frac{1}{2})$ не изменит знак. На всём протяжении интервала $(\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{6})$ $f(x)$ будет отрицательна. В точке $\frac{5\pi}{6}$ $(\sin x - \frac{1}{2})$ обратится в нуль, а потом поменяет знак, знак же косинуса не изменится. Таким образом, на интервале $(\frac{5\pi}{6}; \frac{3\pi}{2})$ $f(x) > 0$. Далее, при переходе через точку $\frac{3\pi}{2}$ знак $f(x)$ снова поменяется. Нам осталось еще аналогичным образом рассмотреть участок от $\frac{\pi}{4}$ до нуля.

Итак, ответ: $x \in (\frac{\pi}{6} + 2\pi k; \frac{\pi}{2} + 2\pi k) \cup (\frac{5\pi}{6} + 2\pi k; \frac{3\pi}{2} + 2\pi k)$, везде $k \in \mathbb{Z}$.

Заметим, что можно было рассматривать функцию не на $[0; 2\pi)$, а на $[\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{6} + 2\pi)$, тогда бы получилось не 5 промежутков знакопостоянства, а 4, и проверять можно было знак в точке 2π, что, как правило, проще.

Кроме того, надо очень внимательно следить за сменой знака. Бывает, что при переходе через одну и ту же точку сразу несколько множителей меняют знак, поэтому сама функция может и не поменять знак.

Кроме того, если допущена ошибка при определении знака, значит, будут допущены ошибки на всех остальных промежутках. Поэтому полезно проверить знак хотя бы еще на одном промежутке, а лучше на всех.

2) Решите неравенство: $\cos x+\cos 2x+\cos 4x \geqslant 0$.

Обозначим $f(x)=\cos x+\cos 2x+\cos 4x$. Поскольку

$$f(-x)=\cos(-x)+\cos(-2x)+\cos(-4x)=\cos x+\cos 2x+\cos 4x=f(x),$$

то $f(x)$ — чётная, кроме того, $f(x)$ — периодическая с периодом 2π. Поэтому можно определить промежутки знакопостоянства на отрезке $[0;\pi]$, потом симметрично отметить промежутки на $[-\pi;0]$, потом обобщить на всю прямую.

Ответ: $x \in [-\frac{8\pi}{9}+2\pi k;-\frac{\pi}{2}+2\pi k]\cup[\frac{-2\pi}{9}+2\pi k;\frac{2\pi}{9}+2\pi k]\cup[\frac{\pi}{2}+2\pi k;\frac{8\pi}{9}+2\pi k]$, где $k\in\mathbb{Z}$.

3) Решите неравенство: $\cos^2 x-\cos^2 4x<0$.

Обозначим $f(x)=\cos^2 x-\cos^2 4x$. Эта функция чётная, периодическая, с периодом π. Значит, можно решить неравенство на отрезке $[0;\frac{\pi}{2}]$, затем симметрично отразить на отрезок $[-\frac{\pi}{2};0]$.

После разложения на множители, определения нулей и знаков на промежутках, получим, что в первой четверти окружности знаки расставлены так: на интервале $(0;\frac{\pi}{5})$ — «+», на интервале $(\frac{\pi}{5};\frac{\pi}{3})$ — «−», на $(\frac{\pi}{3};\frac{2\pi}{5})$ — «+», на $(\frac{2\pi}{5};\frac{\pi}{2})$ — «−».

Отразим симметрично относительно нуля, и заметим, что, несмотря на то, что точка 0 тоже является нулём функции, знак функции при переходе через эту точку не поменялся. Это неудивительно, поскольку при переходе через эту точку знак меняют оба множителя.

Границы отрезка, на котором мы рассматриваем решение неравенства, не являются нулями функции. В данном случае это неудобно, поскольку увеличивает количество промежутков, на которых функция отрицательна. Чтобы исправить эту ситуацию, возьмём самую левую точку $-\frac{2\pi}{5}$ и добавим к ней длину периода: $-\frac{2\pi}{5}+\pi=\frac{3\pi}{5}$. Из-за периодичности $f(x)$ знак на интервале $(-\frac{\pi}{2};-\frac{2\pi}{5})$ совпадает со знаком на интервале $(\frac{\pi}{2};\frac{3\pi}{5})$. Поэтому повернём чуть-чуть наш полукруг и получим следующую картину:

$-\frac{2\pi}{5}$	«+»	$-\frac{\pi}{3}$	«−»	$-\frac{\pi}{5}$	«+»	0	«+»	$\frac{\pi}{5}$	«−»	$\frac{\pi}{3}$	«+»	$\frac{2\pi}{5}$	«−»	$\frac{3\pi}{5}$

Таким образом, получаем ответ: $x\in(-\frac{\pi}{3}+\pi k;-\frac{\pi}{5}+\pi k)\cup(\frac{\pi}{5}+\pi k;\frac{\pi}{3}+\pi k)\cup(\frac{2\pi}{5}+\pi k;\frac{3\pi}{5}+\pi k)$, где $k\in\mathbb{Z}$

4) Решите неравенство: $\operatorname{ctg} 2x-\operatorname{ctg} x\leqslant 2\operatorname{ctg} 4x$.

В этом неравенстве, в отличие от предыдущих, есть знаменатели. Чтобы не было ошибки, лучше на них не сокращать, а оставить до конца преобразований. Если перенести все в левую часть и обозначить за $f(x)$, а потом разложить на множители, то получим:

$$f(x)=\frac{16\sin x\sin 2x\cos^2 x(\sin x-\frac{1}{2})(\sin x+\frac{1}{2})}{\sin x\sin 2x\sin 4x}$$

Это нечётная функция с периодом π. На круг (точнее, на четверть круга) нужно нанести как точки, не входящие в ОДЗ (в которых знаменатель обращается в нуль), так и нули. При этом нужно быть очень осторожным при определении знаков, поскольку очень много кратных точек. Лучше вычислить знак на каждом промежутке. Поскольку функция нечётная, то нули и выколотые точки будут симметричны относительно нуля, а вот знаки должны измениться на противоположные.

2. Общее правило Итак, чтобы решить тригонометрическое неравенство методом интервалов, нужно:

- перенести всё в левую часть и обозначить некоторой функцией;
- определить период функции и исследовать на чётность-нечётность;
- разложить на множители;
- найти ОДЗ;
- найти нули функции;
- нанести на часть круга длиной в период (или полпериода, если функция чётная или нечётная) точки, не входящие в ОДЗ и нули;
- определить знак функции на одном из промежутков, подставив в качестве аргумента точку из этого промежутка;
- определить знаки на других промежутках с помощью подстановки точек или рассуждений о смене знака множителей;
- если функция чётная или нечётная, дорисовать вторую половину периода и расставить точки и знаки;
- если это необходимо, сдвинуть рассматриваемый промежуток длиной в период так, чтобы крайние точки являлись границами промежутков знакопостоянства;
- выбрать необходимые промежутки знакопостоянства и записать ответ, прибавив к границам промежутков длину периода, умноженную на целое число.

3. Решение задач Решите неравенства:

5) $\sin^6 x + \cos^6 x < \dfrac{7}{16}$;

7) $\dfrac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3\operatorname{tg} x$;

6) $\operatorname{ctg} x + \dfrac{\sin x}{\cos x - 2} \leqslant 0$;

8) $4\sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

4. Домашнее задание 1. Неравенства 7,8; 2. Саакян 1342, 1343, 1345; 3. Решите уравнения:

1) $\dfrac{\cos 4x}{\sin 2x - \cos 2x} = 0$;

2) $1 - \sin 2x = \cos x - \sin x$.

Ответы: 1) $x = \frac{3\pi}{8} + \frac{\pi k}{2}$; 2) $x \in \{\frac{\pi}{4} + \pi k; 2\pi k; -\frac{\pi}{2} + 2\pi k\}$, где $k \in \mathbb{Z}$.