Основная теорема арифметики.

Теория и разминка.

В этом листке мы по-прежнему имеем дело только с целыми числами.
Объектом нашего рассмотрения будет утверждение, часто называемое **Основной теоремой арифметики**. *Заключается оно в следующем:*

Любое натуральное число $n \neq 1$, можно представить в виде произведения простых сомножителей, причём такое представление единственно с точностью до порядка сомножителей в нём.

Доказательство этого утверждения будем проводить по индукции. Базой будет очевидный случай $n = 2$.
Осуществим шаг индукции, то есть докажем утверждение для $n = k + 1$, предполагая, что для всех $n \leqslant k$ оно доказано. Если $k + 1$ простое, утверждение очевидно. Иначе $k + 1 = ab$, где $1 < a,\ b < k + 1$. Для чисел a и b по предположению существуют разложения, перемножив их, получим некоторое разложение для $k + 1$.
Докажем теперь единственность. Пусть есть два разных разложения числа $k+1$ на простые множители: $k+1 = p_1p_2\dots p_i = q_1q_2\dots q_j$. Тогда $p_1p_2\dots p_i \,\vdots\, q_1$. Если $p_1 = q_1$, то, разделив $k + 1$ на $p_1 = q_1$, мы получаем число, меньшее $k + 1$, которое однозначно раскладывается, то есть и все остальные множители совпадают с точностью до порядка, что и хотелось. Если же $p_1 \neq q_1$, то НОД$(p_1, q_1) = 1$, а тогда $p_2p_3\dots p_i \,\vdots\, q_1$ и так далее. Рано или поздно найдётся $p_m = q_1$ и утверждение будет доказано.

1) Разложите на простые множители 43!. На сколько нулей кончается это число?

2) Сколько всего натуральных делителей у числа 1001? у числа 43^{15}? у числа 15^{43}? у числа 78000?

Предыдущую задачу полезно решить не только на частных примерах, но и в общем виде.

3) Пусть $a = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\dots p_n^{k_n}$, где p_i – различные простые. Докажите, что у a ровно $(1 + k_1)(1 + k_2)\dots(1 + k_n)$ натуральных делителей.

4) Докажите, что число имеет нечётное количество делителей тогда и только тогда, когда это точный квадрат. Придумайте непосредственное решение и решение с использованием формулы из предыдущей задачи.

Следующее важное утверждение приписывают Евклиду.

5) Докажите, что простых чисел бесконечно много. (Указание: предположим, что их конечное число: p_1, p_2, p_3, …, p_k. Что можно сказать о числе $p_1p_2p_3\dots p_k + 1$?)

Простые числа расположены в натуральном ряду весьма неравномерно. Бывает так, что они отличаются на 2 (такие пары, например, 5 и 7, 41 и 43 и пр., называют **простыми числами-близнецами***), а бывают и длинные серии сплошь из составных чисел.*

6) Докажите, что существует n подряд идущих составных чисел. (Указание: рассмотрите числа $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$, $(n + 1)! + 4$, …, $(n + 1)! + n + 1$.)

Задачи:

Следующие утверждения (задача №7) использовались при доказательстве китайской теоремы об остатках. Теперь пришло время и их доказать.

7) а) Докажите, что если число а кратно нескольким взаимно простым числам, то оно кратно и их произведению. б) Докажите, что если число взаимно просто с несколькими числами, то оно взаимно просто и с их произведением.

8) Может ли факториал некоторого натурального числа оканчиваться на 5 нулей?

9) В классе 17 мальчиков и 4 девочки. Как ни странно, у всех девочек одинаковое число друзей в контакте, и у всех мальчиков тоже. При этом все девочки вместе взятые имеют столько же друзей, сколько и все мальчики. Докажите, что если сложить число друзей у Димы и у Любы, то получится составное число.

10) Найдите все пары простых чисел близнецов вида $2^n - 1$ и $2^n + 1$.

11) Найдите все пары (p, q) простых чисел, таких что $(p - q)^3 = p + q$.

12) Какое максимальное количество натуральных попарно взаимно простых чисел, не превышающих 100, можно выбрать?

13) Можно ли расставить по кругу а) 1543 б) 2008 различных натуральных чисел так, чтобы для любых двух соседних чисел отношение большего из них к меньшему было простым числом?

14) Найдите все числа, которые делятся на 2 и на 9 и имеют ровно 14 делителей.

15) Найдите наименьшее натуральное число, половина которого — точный квадрат, треть — точный куб, пятая часть — пятая степень.

16) Решите в целых числах уравнения: а) $(2x + y)(5x + 3y) = 7$, б) $xy - x + 4y = 15$, в) $x^2 - y^2 = 31$, г) $x^2 = y^2 + 2y + 13$, д) $(x - 7)(x - 11) = 2^y$.