Остатки.

Теория и разминка.

В этом листке мы имеем дело только с целыми числами.

Для двух чисел, целого a и натурального b может и не найтись такое число c, что $a = bc$. Но даже если $a \not\vdots\, b$, число a можно **поделить** *на b* **с остатком**, *то есть найти такое c и такое $0 \leqslant r < b$, что $a = bc + r$. Число c называют* **неполным частным**, *а число r, собственно,* **остатком** *от деления a на b. Возможность и однозначность деления с остатком примем без доказательства. Ситуация $r = 0$, очевидно, равносильна делимости a на b.*

1) Разделите с остатком: 43 на 15, 15 на 43, -1543 на 57.

Фиксируем натуральное число b. Из определения следует, что существует ровно b различных остатков при делении на b: $0, 1, 2, \ldots, b-1$. Все целые числа можно разбить на b классов, поместив в один класс те и только те числа, которые дают определённый остаток при делении на b. Числа из одного класса называют **сравнимыми по модулю** *b. Это записывают так: $m \equiv n (mod\, b)$.*

2) Назовите какое-нибудь положительное и какое-нибудь отрицательное число, сравнимое с 111 по модулю 17. Напишите формулу для всех таких чисел.

3) Докажите, что $a \equiv b (mod\, c)$ тогда и только тогда, когда $(a - b) \vdots c$.

4) По какому модулю сравнимы 15 и 43?

Остатки обладают следующим полезным свойством: остаток от деления суммы, разности или произведения двух чисел зависит только от остатков, даваемых этими числами. То есть, если нас интересует остаток от деления на b, мы можем все числа в любом примере на сложение, умножение и вычитание в любой момент и сколько угодно раз заменять другими, дающими тот же остаток.

5) Докажите это свойство.

6) Какой цифрой оканчивается число 43^{15}?

Иногда даже говорят, что сами остатки можно складывать, вычитать и умножать. То есть, раз всякое число, дающее при делении на 5 остаток 3 при умножении на любое число, дающее при делении на 5 остаток 4 даёт число, дающее остаток 2, то можно просто записать: $(3) \cdot (4) = (2) (mod\, 5)$.

7) Составьте "таблицу сложения" и "таблицу умножения" по модулю 5.

Задачи:

8) На какое число поделили число 102, если известно, что неполное частное совпало с остатком?

9) Выполните сложение, вычитание, умножение остатков по какому-нибудь модулю (подбирает модуль и сочиняет пример принимающий задачу :)).

10) Докажите, что число делится на 6 тогда и только тогда, когда оно делится на 2 и на 3.

11) Докажите, что натуральное число и его сумма цифр сравнимы по модулям 3 и 9.

12) Треть числа поделили на его семнадцатую часть и получили в остатке 100. А какое получили неполное частное?

Многие задачи легко решаются, если их "рассмотреть по какому-нибудь модулю".

13) Какие остатки дают точные квадраты при делении на 3? 4? 5? 10?

14) Натуральные числа x, y, z такие, что $x^2 + y^2 = z^2$, называются **пифагоровой тройкой**. Докажите, что хотя бы одно из чисел, входящих в пифагорову тройку, делится на три.

15) Может ли число $(m^2 + m + 1)^2 + (n^2 + n + 1)^2$ быть точным квадратом?

16) Докажите, что при всяком натуральном n $(53^n + 14^n - 27^n - 14) \vdots 13$.

17) Последовательность задана так: $a_1 = a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_n a_{n+1} + 1$.

а) Докажите, что ни один член этой последовательности не делится на 4.

б) Докажите, что если среди членов этой последовательности есть делящийся на k, то таких членов в ней бесконечно много.

18) Докажите, что уравнение $15x^2 = 9 + 7y^2$ не имеет решений в целых числах.

Уравнения, которые требуется решить в целых числах, называются диофантовыми *в честь Диофанта Александрийского, древнегреческого математика, жившего в III веке до н. э. и оставившего выдающееся сочинение "Арифметика", в котором много места уделялось именно решению уравнений в целых числах.*

19) Существуют ли такие числа x и y, что $x^3 + y^3 = 10000000$?

20) Одно и то же число поделили с остатком на 3, на 18 и на 48. Остатки сложили, получилось 39. Какой был остаток при делении на 3?