

Московский турнир математических боёв, 2005 год Командная олимпиада, 8-е классы, высшая лига

1) В некотором посёлке 1000 жителей. Ежедневно каждый из них делится узnanными вчера новостями со всеми своими знакомыми. Известно, что любая новость становится известной всем жителям посёлка. Докажите, что можно выбрать 90 жителей так, что если одновременно всем им сообщить какую-то новость, то через 10 дней она станет известной всем жителям посёлка.

2) Из точки M стороны AC равностороннего треугольника ABC опущены перпендикуляры MX и MY на стороны AB и BC соответственно. Точка O — центр треугольника ABC . Докажите, что прямая OM делит отрезок XY пополам.

3) К натуральному числу A справа приписали пять цифр. Получившееся число оказалось равным сумме всех натуральных чисел от 1 до A . Найдите все такие A .

4) Медиана AM , биссектриса BL и высота CH пересекаются в одной точке. Обязательно ли треугольник равносторонний?

5) Можно ли из бесконечной клетчатой плоскости удалить такие два не имеющих общих точек "луча" ("лучом" называются клетки одной строки или одного столбца, идущие подряд, начиная с некоторой клетки плоскости), чтобы, начав с некоторой не удалённой клетки, обойти всю оставшуюся плоскость? Разрешается переходить из любой клетки плоскости на любую соседнюю по горизонтали или вертикали не удалённую клетку, которая не была пройдена ранее.

6) Можно ли разбить квадрат на треугольники так, чтобы каждый треугольник граничил (по отрезку) не менее чем с четырьмя другими?

7) Найдите все рациональные положительные числа a и b , такие что числа $a + b + \frac{1}{ab}$ и $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + ab$ — целые.

8) С конечной последовательностью нулей и единиц разрешается производить следующие операции: заменять 01 на 100 или на 110. Может ли для некоторой начальной последовательности процесс замен продолжаться бесконечно?