

Чебурашкины уши

Теорема. Геометрическим местом точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом, являются чебурашкины уши с дырками.

1. Постройте геометрическое место точек, из которых данный отрезок AB виден под данным углом α .
2. A и B – фиксированные точки окружности, C – произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения биссектрис треугольника ABC .
3. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и высоте, проведенной из вершины этого угла.
4. Постройте в треугольнике ABC такую точку X , что $\angle XAB = \angle XBC = \angle XCA$. (Эта точка, так же как и точка Y , для которой $\angle YAC = \angle YCB = \angle YBA$, называется **точкой Брокера**.)

Домашнее задание

5. Вершины чертежного угольника скользят по сторонам прямого угла. Найдите траекторию вершины прямого угла угольника.
6. A и B – фиксированные точки окружности, C – произвольная точка окружности. Найдите геометрическое место точек пересечения высот треугольника ABC .
7. Постройте треугольник по стороне, противолежащему углу и радиусу вписанной окружности.
8. Каждая из четырех окружностей касается внешним образом двух других. Докажите, что точки касания лежат на одной окружности.
9. В треугольнике ABC $\angle B = 60^\circ$, биссектрисы AD и CE пересекаются в точке O . Докажите, что $OD = OE$.

Угол между касательной и хордой

Теорема Угол между касательной и хордой, проведенной через точку касания, равен половине угловой величины дуги, заключенной между ними.

1. В точке M данной окружности проведена касательная MB и хорда MA . Докажите, что MB и MA находятся на равном расстоянии от середины дуги MA .
2. Докажите, что хорды двух касающихся окружностей, соединяющие концы двух секущих, проходящих через точку касания, параллельны между собой.
3. К окружности с недоступным центром проведите касательную в данной на ней точке.
4. Окружности S_1 и S_2 пересекаются в точке A . Через точку A проведена прямая, пересекающая S_1 в точке B , S_2 в точке C . В точках C и B проведены касательные к окружностям, пересекающиеся в точке D . Докажите, что угол BDC не зависит от выбора прямой, проходящей через A .
5. Две окружности касаются внутренним образом в точке M . Пусть AB – хорда большей окружности, касающаяся меньшей окружности в точке T . Докажите, что MT – биссектриса угла AMB .

Домашнее задание

6. По углам вписанного треугольника определить углы треугольника, ограниченного касательными к кругу в его вершинах.
7. Через вершину C прямого угла прямоугольного треугольника ABC проведена касательная к описанной окружности этого треугольника. Расстояния от вершин A и B до касательной равны a и b . Найдите катеты треугольника ABC .
Указание: опустите из вершины C высоту.
8. Касательная в точке A к описанной окружности треугольника ABC пересекает прямую BC в точке E ; AD – биссектриса треугольника ABC . Докажите, что $AE=ED$.
9. Две окружности пересекаются в точках A и B . Точка E принадлежит одной из окружностей. Прямые AE и BE пересекают вторую окружность в точках C и D . Докажите, что касательная, проведенная к первой окружности в точке E , параллельна прямой CD . Рассмотрите два случая расположения точки E .
10. AB и CD – диаметры одной окружности. Из точки M этой окружности опущены перпендикуляры MP и MQ на прямые AB и CD . Докажите, что длина отрезка PQ не зависит от положения точки M .

Высоты треугольника, ортоцентр и ортотреугольник.

1. AA_1 и BB_1 – высоты треугольника ABC . Докажите, что: а) точки A , B , A_1 и B_1 лежат на одной окружности; б) $\angle A_1B_1C = \angle ABC$.
2. В треугольнике ABC проведены высоты BB_1 и AA_1 ; O — центр описанной около треугольника ABC окружности. Докажите, что прямые A_1B_1 и CO перпендикулярны. *Указание. Проведите касательную через точку C .*

Определение. *Треугольник, вершинами которого являются основания высот данного треугольника, называется его ортотреугольником.*

3. Докажите, что высоты треугольника делят углы его ортотреугольника пополам.
4. Докажите, что ортоцентр остроугольного треугольника является центром окружности, вписанной в его ортотреугольник.
5. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно его стороны, принадлежит описанной окружности.
6. Докажите, что точка, симметричная ортоцентру H треугольника ABC относительно середины стороны BC , а) принадлежит описанной окружности; б) диаметрально противоположна вершине A .

Задача на 5

7. Вокруг остроугольного треугольника ABC описана окружность. Продолжения высот треугольника, проведённых из вершин A и C , пересекают окружность в точках E и F соответственно, D – произвольная точка на (меньшей) дуге AC , K – точка пересечения DF и AB , L – точка пересечения DE и BC . Докажите, что прямая KL проходит через ортоцентр треугольника ABC .

Домашнее задание

8. Докажите, что серединный перпендикуляр к отрезку с концами в основаниях высот треугольника делит противоположную сторону пополам.
9. Пусть H – ортоцентр треугольника ABC . Докажите, что радиусы окружностей, описанных около треугольников ABC , ABH , BCH и ACH , равны между собой.
10. Продолжения высот остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что биссектрисы треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 .
11. Постройте треугольник по точкам пересечения его высот с описанной окружностью.
12. Пусть O – центр описанной около треугольника ABC окружности, $\angle AOC = 60^\circ$. Найдите угол AMC , где M – центр окружности, вписанной в треугольник ABC .

Биссектриса делит дугу пополам

1. Докажите, что биссектриса угла A треугольника ABC и серединный перпендикуляр к стороне BC пересекают описанную окружность в одной и той же точке.
2. Докажите, что биссектриса CL делит пополам угол между медианой CM и высотой CH треугольника ABC ($AC \neq BC$) тогда и только тогда, когда $\angle C = 90^\circ$.
3. Прямая, проходящая через точку A и центр O вписанной окружности треугольника ABC , вторично пересекает описанную окружность этого треугольника в точке M . Докажите, что треугольники BOM и SOM равнобедренные.
4. Продолжения биссектрис остроугольного треугольника ABC пересекают описанную окружность этого треугольника в точках A_1 , B_1 и C_1 . Докажите, что высоты треугольника $A_1B_1C_1$ лежат на прямых AA_1 , BB_1 и CC_1 . (*Одно из решений использует предыдущую задачу, другое – теорему об угле между хордами.*)
5. Докажите, что в любом треугольнике биссектриса лежит между медианой и высотой, проведенными из той же вершины.
6. Постройте треугольник по точкам пересечения с описанной окружностью продолжений его высоты, медианы и биссектрисы, проведенных из одной вершины.

Домашнее задание

7. Известно, что в некотором треугольнике медиана, биссектриса и высота, проведенные из вершины C , делят угол на четыре равные части. Найдите углы этого треугольника.
8. Постройте треугольник по высоте, медиане и биссектрисе, проведенным из одной вершины.
9. Биссектрисы углов треугольника продолжают до пересечения с описанной окружностью в точках A_1 , B_1 , C_1 . Выразите углы треугольника $A_1B_1C_1$ через углы треугольника ABC .
10. Найдите боковые стороны и диагонали трапеции с основаниями 12 и 20, если известно, что центр ее описанной окружности лежит на большем основании.
11. Биссектриса внешнего угла при вершине C треугольника ABC пересекает описанную окружность с центром O в точке D . Докажите, что прямая DO делит сторону AB пополам. *Указание. Докажите, что треугольник DAB равнобедренный.*