# Занятие 47 (12/04/2008)
# Скалярное произведение векторов

***Определение*** Пусть $\alpha$ — острый угол. Рассмотрим прямоугольный треугольник с углом, равным $\alpha$. Назовём косинусом угла $\alpha$ число, равное отношению прилежащего катета к гипотенузе, а синусом — отношение противолежащего катета к гипотенузе.
Пусть $\beta$ — тупой угол. Тогда смежный с ним угол $\alpha$ — острый. Косинусом $\beta$ назовём число, равное $-\cos\alpha$, а синусом — число, равное $\sin\alpha$. Синус нуля и $180^\circ$ определим равным нулю, $\cos 0^\circ = 1$, $\cos 180^\circ = -1$. Синус $90^\circ$ определим равным единице, а косинус — нулю.

Нетрудно показать, что значение синуса и косинуса угла не зависит от выбора прямоугольного треугольника, а зависит только от угла.

**6.45.** Докажите, что а) чем больше угол, тем меньше его косинус; б) чем больше острый угол, тем больше его синус, а чем больше тупой угол, тем меньше его синус.

**6.46.** Найдите синус и косинус углов: а) $135^\circ$; б) $120^\circ$; в) $150^\circ$.

Во всех следующих теоремах и задачах имеется ввиду декартова система координат.
Пусть тело, на которое действует сила $\overline{F}$, совершило перемещение $\overline{s}$. При этом, как говорят физики, сила совершает работу. Если сила параллельна перемещению, работа равна произведению силы и перемещения, взятому со знаком «+», если сила действует в направлении перемещения, и со знаком «−» в противном случае. В общем случае, когда $\overline{F}$ и $\overline{s}$ образуют угол $\varphi$, формула для вычисления работы будет чуть более сложной. Для этого разложим силу $\overline{F}$ на сумму двух векторов, один из которых будет параллелен перемещению, а другой перпендикулярен ему. Итак, $\overline{F} = \overline{F}_{\parallel} + \overline{F}_{\perp}$, где $\overline{F}_{\parallel} || \ \overline{s}$, а $\overline{F}_{\perp} \perp \overline{s}$. Но сила, перпендикулярная пути, работы не совершает! Поэтому работа равна произведению $|\overline{F}_{\parallel}| \cdot |\overline{s}|$, взятому с нужным знаком, или $|\overline{F}| \cdot |\overline{s}| \cdot \cos\varphi$. Великий ирландский физик и математик XIX века Уильям Гамильтон понял, что действие над векторами, используемое в определении работы, заслуживает названия умножения, так как для него, как и для умножения чисел, выполняется дистрибутивный закон.

***Определение*** *Скалярным произведением* векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ называется число (*скаляр*) $|\overline{a}| \cdot |\overline{b}| \cdot \cos\varphi$, где $\varphi$ — угол между векторами (если векторы сонаправлены, то полагают $\varphi = 0^\circ$, а если противоположно направлены, то $\varphi = 180^\circ$). Скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $\overline{b}$ обозначают $\overline{a} \cdot \overline{b}$.

В каких случаях скалярное произведение положительно, в каких отрицательно, и в каких — равно нулю?

***Теорема (свойства скалярного произведения)***
1) Коммутативность: $\overline{a} \cdot \overline{b} = \overline{b} \cdot \overline{a}$;
2) «Ассоциативность»: $(\lambda\overline{a}) \cdot \overline{b} = \lambda(\overline{a} \cdot \overline{b})$;
3) Дистрибутивность: $\overline{a} \cdot (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \cdot \overline{b} + \overline{a} \cdot \overline{c}$.

Эти свойства (докажем их позже) показывают, что при проведении выкладок с участием скалярного произведения, как и при действиях с числами, можно раскрывать скобки, приводить подобные члены и так далее. Нужно только не забывать, что скалярное произведение векторов — не вектор, а число.

***Теорема*** Скалярное произведение вектора самого на себя равно квадрату его длины.

**6.47.** Даны единичные векторы $\overline{a}$ и $\overline{b}$, $\angle(\overline{a}, \overline{b}) = 60^\circ$. Найдите длину вектора $(\overline{a} + \overline{b})$.

**6.48.** Найдите скалярное произведение векторов $\overline{a}$ и $(\overline{a} + \overline{b})$ из предыдущей задачи. Решите задачу двумя способами.

**6.49.** Найдите скалярное произведение векторов $(\overline{a} - \overline{b})$ и $(\overline{a} + \overline{b})$ из предыдущей задачи. Решите задачу двумя способами.

**6.50.** Пусть $ABC$ — равносторонний треугольник и $O$ — его центр. Докажите, что для любой точки $M$ верно равенство $MA^2 + MB^2 + MC^2 = OA^2 + OB^2 + OC^2 + 3 \cdot MO^2$.

# Занятие 48 (14/04/2008)
# Скалярное произведение векторов в координатах

**6.51.** Докажите свойства скалярного произведения.

Решение:

1) $\overline{a}\cdot\overline{b}=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=|\overline{b}|\cdot|\overline{a}|\cdot\cos\angle(\overline{b};\overline{a})=\overline{b}\cdot\overline{a}$.

2) $\lambda(\overline{a}\cdot\overline{b})=\lambda\cdot|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})$. Рассмотрим угол между вектором $\lambda\overline{a}$ и $\overline{b}$. Если $\lambda>0$, то $\angle(\lambda\overline{a};\overline{b})=\angle(\overline{a};\overline{b})$, а если $\lambda<0$, то $\angle(\lambda\overline{a};\overline{b})=180^\circ-\angle(\overline{a};\overline{b})$. Поэтому $|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\lambda\cdot\cos\angle(\overline{a};\overline{b})=|\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot|\lambda|\cdot\cos\angle(\lambda\overline{a};\overline{b})=|\lambda\overline{a}|\cdot|\overline{b}|\cdot\cos\angle(\lambda\overline{a};$
Если же $\lambda=0$, то $0\cdot(\overline{a}\cdot\overline{b})=0=\overline{0}\cdot\overline{b}=(0\cdot\overline{a})\cdot\overline{b}$.

3) Заметим, что если один из векторов нулевой, утверждение очевидно. Пусть все вектора ненулевые. Чтобы доказать свойство дистрибутивности в этом случае, введём систему координат так, чтобы вектор $\overline{c}$ был сонаправлен базисному вектору $\overline{i}$. То есть $\overline{c}=c\overline{i}$, где $c$ — длина вектора $\overline{c}$. В этой системе координат вектор $\overline{a}$ будет иметь координаты $\{x_1;y_1\}$, вектор $\overline{b}$ — $\{x_2;y_2\}$, а вектор $(\overline{a}+\overline{b})$, соответственно, будет иметь координаты $\{x_1+x_2;y_1+y_2\}$. Поскольку $\overline{c}\upuparrows\overline{i}$, то углы между вектором $\overline{c}$ и остальными векторами будут такими же, как и между вектором $\overline{i}$ и остальными векторами. Рассмотрим $\alpha=\angle(\overline{a};\overline{i})$. Если $x_1>0$, то это угол в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $|\overline{a}|$ и прилежащим катетом $|x_1\overline{i}|=x_1$, то есть $\cos\alpha=\frac{x_1}{|\overline{a}|}$. Если же $x_1<0$, то это угол, смежный с углом в прямоугольном треугольнике с гипотенузой $|\overline{a}|$ и прилежащим катетом $|x_1\overline{i}|=-x_1$, то есть $\cos\alpha=-\frac{-x_1}{|\overline{a}|}=\frac{x_1}{|\overline{a}|}$. Если же $x_1=0$, то $\overline{a}\perp\overline{i}$, и $\cos\alpha=0=\frac{x_1}{|\overline{a}|}$. То есть в любом случае $\cos\alpha=\frac{x_1}{|\overline{a}|}$. Аналогично для углов, которые образуют вектора $\overline{b}$ и $\overline{a}+\overline{b}$ с вектором $\overline{i}$. Поэтому

$$(\overline{a}+\overline{b})\cdot\overline{c}=|\overline{a}+\overline{b}|\cdot c\cdot\frac{x_1+x_2}{|\overline{a}+\overline{b}|}=x_1c+x_2c=|\overline{a}|\cdot c\frac{x_1}{|\overline{a}|}+|\overline{b}|\cdot c\frac{x_2}{|\overline{b}|}=\overline{a}\cdot\overline{c}+\overline{b}\cdot\overline{c},$$

что и требовалось доказать.

***Теорема*** Скалярное произведение векторов $\overline{a}=\{x_1;y_1\}$ и $\overline{b}=\{x_2;y_2\}$ равно $x_1x_2+y_1y_2$.

Действительно, $\overline{a}\cdot\overline{b}=(x_1\overline{i}+y_1\overline{j})(x_2\overline{i}+y_2\overline{j})=x_1x_2\overline{i}^2+y_1y_2\overline{j}^2+x_1y_2\overline{i}\cdot\overline{j}+x_2y_1\overline{i}\cdot\overline{j}=x_1x_2+y_1y_2$, так как $\overline{i}^2=\overline{j}^2=1$, а $\overline{i}\cdot\overline{j}=0$.

**6.52.** Найдите стороны и углы треугольника с вершинами$A(0;\sqrt{3})$,$B(2;\sqrt{3})$ и $C(\frac{3}{2};\frac{\sqrt{3}}{2})$.

**6.53.** Докажите с помощью векторов, что диагонали ромба перпендикулярны.

**6.54.** Пусть $\overline{a}=\{3;-2\}$; $\overline{b}=\{-1;4\}$. Найдите а) $|\overline{a}-2\overline{b}|$; б) $|3\overline{a}+\overline{b}|$; в) $(\overline{a}-2\overline{b})(3\overline{a}+\overline{b})$; г) $\cos\angle(\overline{a}-2\overline{b};3\overline{a}+\overline{b})$; д) $\lambda\mid(\overline{a}+\lambda\overline{b})\|\overline{a}$; е) $\mu\mid(\overline{a}+\mu\overline{b})\perp\overline{a}$; ж) $\overline{e}\mid|\overline{e}|=1;\overline{e}\uparrow\downarrow\overline{b}$; з) $\overline{p}\mid\overline{p}\cdot\overline{a}=3;\overline{p}\cdot\overline{b}=-1$.

**6.55.** Пусть точки $A$, $B$, $C$ имеют координаты $A(-1;2)$, $B(3;5)$; $C(3;0)$, $ACEF$ — квадрат. Докажите, что $ABC$ — треугольник и определите его вид (по сторонам и по углам). Найдите а) длину медианы $CK$; б) координаты точки пересечения медиан $M$; в) $\cos\angle ACM$; г) координаты точек $E$ и $F$.

**6.56.** В прямоугольном треугольнике $ABC$ с прямым углом $C$ катеты равны 3 и 4, $CL$ — биссектриса, $CH$ — высота, $O$ — центр вписанной окружности. Разложите по векторам $\overline{CB}$ и $\overline{CA}$ а) $\overline{CL}$; б) $\overline{CO}$; в) $\overline{CH}$.