Занятие 39 (01/03/2008)
Векторы

6.11. $M_1, M_2, \ldots, M_6$ — середины сторон шестиугольника $A_1A_2 \ldots A_6$. Докажите, что существует $\triangle PQN$, стороны которого равны и параллельны отрезкам M_1M_2, M_3M_4, M_5M_6.

6.12. На сторонах треугольника ABC построены параллелограммы ABB_1A_2, BCC_1B_2, ACC_2A_1. Докажите, что существует треугольник, стороны которого равны и параллельны отрезкам A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2.

6.13. Точки M, K, N и L — середины сторон AB, BC, CD, DE пятиугольника $ABCDE$, P и Q — середины отрезков MN и KL. Докажите, что отрезок PQ в четыре раза меньше стороны AE и параллелен ей.

6.14. E и F — середины сторон AB и CD четырёхугольника $ABCD$, K, L, M и N — середины отрезков AF, CE, BF и DE. Докажите, что $KLMN$ — параллелограмм.

6.15. Докажите, что отрезки, соединяющие середины противоположных сторон произвольного выпуклого четырёхугольника, точкой пересечения делятся пополам.

6.16. На сторонах треугольника заданы точки, которые делят стороны в одном и том же соотношении (в каком-либо одном направлении обхода). Докажите, что точки пересечения медиан данного треугольника и треугольника с вершинами в точках деления совпадают.

Занятие 40 (03/03/2008)
Метод векторов

6.17. Что представляет собой четырёхугольник $MNPQ$, если для некоторой точки O выполняется равенство $\overrightarrow{ON} - \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OQ}$?

6.18. Дан треугольник ABC. Докажите, что вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} + \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ направлен вдоль биссектрисы угла A, а вектор $\frac{\overrightarrow{AB}}{|AB|} - \frac{\overrightarrow{AC}}{|AC|}$ — вдоль биссектрисы внешнего угла при вершине A.

6.19. Проведены четыре радиуса: OA, OB, OC и OD — окружности с центром O. Докажите, что если $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} = \vec{0}$, то $ABCD$ — прямоугольник.

6.20. Дан правильный шестиугольник $ABCDEF$. Точки B, M и N лежат на одной прямой, $M \in [AC]$, $N \in [CE]$, $AM : AC = CN : CE = \lambda$. Найдите λ.

6.21. На плоскости дано несколько точек. Для некоторых пар A и B из них взяты векторы $\overrightarrow{AB}$, причём так, что в каждой точке начинается столько же векторов, сколько в ней заканчивается. Докажите, что сумма всех выбранных векторов равна $\vec{0}$.

6.22. На плоскости даны n векторов, не все они коллинеарны. Сумма любых $n-1$ из них коллинеарна с оставшимся вектором. Докажите, что сумма всех векторов равна $\vec{0}$.