Занятия 22 и 23 (03/12/2007 и 08/12/2007)
Сравнения по модулю

4.49. Докажите следующий признак делимости на 19: если у числа убрать последнюю цифру, а затем добавить к получившемуся числу эту цифру, умноженную на 2, то первоначальное число будет делиться на 19 в том и только в том случае, если получившееся число делится на 19.

4.50. Известно, что

$$\begin{cases} 2x+3y \equiv 3 \pmod 5 \\ 3x+y \equiv 4 \pmod 5 \end{cases}$$

Докажите, что $(x+y) \,\vdots\, 5$.

4.51. Докажите, что $300^{3000}-1$ делится на 1001.

4.52. Найдите остаток от деления 790^{201} на 303.

4.53. а) Числа a и b таковы, что $(a^2+b^2) \,\vdots\, 7$. Докажите, что $a \,\vdots\, 7$ и $b \,\vdots\, 7$.
б) Числа a и b таковы, что $(a^2+b^2) \,\vdots\, 83$. Докажите, что $a \,\vdots\, 83$ и $b \,\vdots\, 83$.
в) Пусть $(a^2+b^2) \,\vdots\, p$, причём ни a, ни b не делятся на p (p — простое, большее двух). Найдите остаток p при делении на 4.

4.54. Дан прямоугольник 451×287. На какое минимальное число равных квадратов его можно разрезать?

4.55. Докажите, не используя ММИ, что купюрами в 3 и 5 рублей можно со сдачей заплатить любую сумму.

4.56. Теорема о линейной комбинации На доске написана следующая матрица:

$$\begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ b & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где a, b — натуральные числа. Строка матрицы считается больше другой, если в ней больше элемент, находящийся в первом столбце. За один шаг разрешается вычесть из большей строки всю меньшую, то есть из матрицы

$$\begin{pmatrix} a & x_a & y_a \\ b & x_b & y_b \end{pmatrix}$$

можно получить матрицу

$$\begin{pmatrix} a-b & x_a-x_b & y_a-y_b \\ b & x_b & y_b \end{pmatrix},$$

если $a > b$, и матрицу

$$\begin{pmatrix} a & x_a & y_a \\ b-a & x_b-x_a & y_b-y_a \end{pmatrix},$$

если $a < b$. Закончится ли такой алгоритм? Какие числа будут стоять в получившейся матрице?

4.57. При каких условиях разрешимо сравнение $ax \equiv b \pmod m$?

4.58. Пусть a, b, c, d — фиксированные целые числа. Покрасим в синий цвет точки числовой прямой, представимые в виде $a+bn$, в красный цвет точки, представимые в виде $c+dm$ (n и m — произвольные целые числа). Точки, покрашенные в оба цвета, покрасим в фиолетовый.
а) При каких условиях пусто множество фиолетовых точек?
б) Докажите, что при $(n, m) = 1$ хотя бы одна фиолетовая точка существует.
в) Докажите, что если множество фиолетовых точек не пусто, то оно представляется в виде $e+fk$ (e, f — фиксированные целые числа). Найдите e и f.