Занятия 5 и 6 (17/09/2007 и 24/09/2007)
Метод математической индукции

Теорема 1. *Пусть дана бесконечная последовательность утверждений (т.е. бесконечный ряд утверждений, занумерованных натуральными числами): $У_1$, $У_2$, $У_3$, ..., где $У_i$ — i-е утверждение. Пусть также выполняются следующие два условия:*
1) (база) $У_1$ истинно;
2) (шаг) каким бы ни было натуральное число k, коль скоро $У_k$ истинно, то обязательно и $У_{k+1}$ истинно.
Тогда все утверждения в данной последовательности истины.

Эта теорема называется принципом математической индукции, а метод решения задач с его помощью — методом математической индукции.
2.1. Имеется последовательность утверждений: «ля произвольных различных n натуральных чисел количество всех их простых делителей не меньше, чем $n-1$» Есть ли в этой последовательности истинные утверждения? Ложные? Сформулируйте утверждения с номерами 1, 2007, k, $l-1$, $2m+1$.

2.2. Из клетчатого квадрата $2^n \times 2^n$ вырезали
а) квадрат $2^{n-1} \times 2^{n-1}$ из угла;
б) одну угловую клетку;
в) одну произвольную клетку.
Докажите, что оставшуюся фигуру можно разрезать на уголки из трех клеток.

2.3. Строители строят одноэтажный дом из бетонных плит, окрашенных с одной стороны в синий цвет, а с другой — в жёлтый. Сначала строятся наружные стены (так, что снаружи дом — синий), а потом одна за другой проводятся прямые перегородки от стены до стены в любом направлении. Докажите, что сколько бы дом ни строили, обязательно найдётся комната с жёлтыми стенами.

2.4. На веревочном кольце нанизано N обручей разного размера. Обручи пронумерованы от 1 до N в порядке возрастания размера, причем i-й обруч проходит сквозь j-й тогда и только тогда, когда $j - i > 1$. Докажите, что в каком бы порядке они изначально не располагались на веревке, их можно упорядочить по возрастанию размера.

2.5. Докажите, что число $\underbrace{11\ldots11}_{3^n \text{ единиц}}$ делится на 3^n.

2.6. n восьмиклассников добыли мешок золотого песка. Каждый хочет получить не меньше $\frac{1}{n}$ золота. Никаких способов измерения у них нет, однако каждый умеет оценивать на глаз. Мнения восьмиклассников о величине куч могут расходиться. Как им поделить добычу, чтобы все были довольны?

2.7. («анойская башня» Имеется пирамида с n кольцами возрастающих размеров (внизу — самое большое) и еще два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но при этом запрещается класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что все кольца можно перенести на один их пустых стержней за $2^n - 1$ ходов.

Иногда для доказательства того или иного утверждения бывает полезно рассмотреть последовательность утверждений, одним из членов которого является данное утверждение, и доказать всю последовательность методом математической индукции.
2.8. Плоскость поделена на области 14-ю прямыми. Докажите, что эти области можно раскрасить в два цвета так, чтобы любые две соседних области были окрашены в разные цвета. (Соседними называются области, имеющие общий участок границы.)

2.9. На сколько частей делят плоскость 15 прямых общего положения? «бщего положения»значает, что никакие две прямые не параллельны и никакие три прямые не пересекаются в одной точке.

2.10. Число $x + \frac{1}{x}$ целое. Докажите, что число $x^{2007} + \left(\frac{1}{x}\right)^{2007}$ тоже целое.

Занятие 6 (24/09/2007)
Домашнее задание

2.11. Дана последовательность утверждений, в которой n-е утверждение следующее:

$$1 + 2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

а) Сформулируйте утверждения с номерами 1, 2007, k, $l-1$, $2m+1$.
б) Докажите формулу.

2.12. Последовательность a_n задана рекуррентно: $a_1 = A$, $a_{n+1} = a_n + D$. Докажите, что $a_n = A + D(n-1)$.

2.13. Последовательность b_n задана рекуррентно: $b_1 = B$, $b_{n+1} = b_n \cdot Q$. Докажите, что $b_n = b \cdot Q^{n-1}$.

2.14. Последовательность c_n задана рекуррентно: $c_1 = 1$, $c_{n+1} = 2 \cdot c_n + 1$. Докажите, что $c_n = 2^n - 1$.