

# Программа экзамена по спецкурсу в 8в классе, 2008 г.

Основные понятия и определения надо уметь формулировать, применять при решении задач, приводить примеры. Теоремы нужно уметь формулировать, доказывать, использовать при решении задач. Основные задачи надо уметь решать. В билете будет два теоретических вопроса и две задачи на разные темы. Кроме того, могут быть заданы любые дополнительные вопросы из курса.

## Последовательности

**Основные понятия и определения.** Последовательности, способы их задания, периодические последовательности, предпериод, период, наименьший период, сумма.

**Теоремы.** О длине наименьшего периода, о сумме периодических последовательностей.

**Основные задачи.** Уметь задавать последовательность разными способами, находить элементы последовательностей, заданных разными способами, выводить из формулы  $n$ -ного члена рекуррентную формулу, из формулы суммы первых элементов рекуррентную формулу; доказывать периодичность последовательности, заданной рекуррентно.

## Рациональные и иррациональные числа

**Основные понятия и определения.** Рациональные и иррациональные числа, представление их в виде десятичной дроби, периодические дроби.

**Теоремы.** Представление рационального числа в виде периодической или конечной дроби (рассмотреть оба случая) и наоборот, длина периода такой дроби.

**Основные задачи.** Уметь переводить рациональное число в десятичную дробь и обратно.

## Метод математической индукции

Понятие ММИ.

**Теоремы.** Формула суммы первых  $n$  натуральных чисел.

**Основные задачи.** Уметь решать задачи о бородачатых прямоугольниках, о квадрате  $2n \times 2n$  с вырезанной клеткой, о ханойской башне; доказывать делимость с помощью ММИ; доказывать тождества с помощью ММИ.

## Системы счисления

**Основные понятия и определения.** Системы счисления.

**Теоремы.** Представление числа в СС с натуральным основанием, большим единицы.

**Основные задачи.** Уметь переводить числа из одной системы счисления в другую (двумя способами из десятичной, и одним — в десятичную); строить таблицы сложения и умножения в разных СС; складывать и умножать числа столбиком в разных СС.

## Сравнения по модулю

**Основные понятия и определения.** Делимость, остатки, простые и составные числа, НОД, взаимная простота, система вычетов (полная и приведённая), сравнения по модулю,  $\varphi(n)$ .

**Теоремы.** Эквивалентность двух определений сравнений по модулю; свойства сравнений (сложение, вычитание, умножение, возведение в степень, два свойства деления); свойство одинаковых сравнений по взаимно простым модулям; признаки делимости (и нахождения остатка) на 10, 2, 5, 3, 9, 11, 7, 13; малая теорема Ферма и её следствие; теорема Вильсона; алгоритм Евклида нахождения НОД; разрешимость сравнения вида  $ax \equiv b \pmod{m}$ ; китайская теорема об остатках (только формулировка для случая двух сравнений); теорема Эйлера; мультипликативность функции Эйлера.

**Основные задачи.** Уметь находить остатки от деления сумм, произведений, степеней, используя свойства сравнений, МТФ, т. Вильсона, т. Эйлера; уметь решать сравнения вида  $ax \equiv b \pmod{m}$  и системы двух таких сравнений; уметь находить «обратные числа»; уметь находить НОД алгоритмом Евклида; уметь вычислять функцию Эйлера, пользуясь свойствами делимости и её мультипликативностью.

## Множества

**Основные понятия и определения.** Множество, элемент, подмножество, знаки  $\in$  и  $\subset$ ; пустое множество, равные множества; пересечение, объединение, разность, симметрическая разность множеств; отображение, обратное отображение, взаимно однозначное соответствие, инъекция, сюръекция; образ, прообраз элемента, образ, прообраз подмножества множества при отображении; мощность множества, множество, меньше либо равное по мощности, равномогные множества, конечные, счётные, континуальные множества.

**Теоремы.** Количество подмногеств множества из  $n$  элементов; 10 свойств операций с множествами, существование обратного отображения, единственность обратного отображения, формулы  $f(f^{-1}(y)) = y$ ,  $f^{-1}(f(x)) = x$  (при каких условиях?); 4 свойства образов при отображении; равномогность  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{N}$  и  $\mathbb{Q}$ , прямой и отрезка; теорема Кантора; теорема Кантора-Берштейна (только формулировка); неравномогность натурального ряда и числовой прямой.

**Основные задачи.** Уметь находить количество элементов в пересекающихся множествах, используя круги Эйлера; проверять и доказывать равенства; находить обратное отображение; строить вз. одн. соответствие между различными равномогными множествами; находить образы и прообразы элементов и подмногств при заданном отображении.

### Векторы

**Основные понятия и определения.** Направленные отрезки, векторы, нулевой вектор, длина вектора, коллинеарность, сонаправленность; операции над векторами, противоположный вектор; координаты вектора, базисные вектора, аффинная система координат, радиус-вектор, координаты точки, декартова система координат;  $\sin$  и  $\cos$  угла, скалярное произведение векторов.

**Теоремы.** Корректность определений операций над векторами, свойства сложения и умножения на число; свойство медианы и точки пересечения медиан; теорема о линейной комбинации; выражение координат вектора через координаты начала и конца; координаты коллинеарных векторов; координаты точки, которая делит отрезок в заданном соотношении; координаты середины отрезка; длина вектора в координатах; расстояние между точками; уравнение окружности; окружность Аполлония; длина медианы; синус и косинус углов  $0^\circ$ ,  $30^\circ$ ,  $45^\circ$ ,  $60^\circ$ ,  $90^\circ$ ,  $135^\circ$ ,  $120^\circ$ ,  $180^\circ$ ; свойства скалярного произведения; модуль вектора; скалярное произведение векторов в координатах; теорема косинусов.

**Основные задачи.** Уметь выражать вектор через сумму или разность других вектора; раскладывать вектор по двум неколлинеарным; применять метод векторов в геометрических задачах; находить координаты точек, пользуясь формулами; применять метод координат в геометрических задачах; находить длины векторов и углы между ними, используя обе формулы скалярного произведения; доказывать параллельность и перпендикулярность в геометрических задачах, используя скалярное произведение.

### Графы

**Основные понятия и определения.** Граф, рёбра, вершины, степень вершины, изоморфные графы, петли, кратные рёбра, двудольные графы, связность, путь, цикл, дерево, висячая вершина, грань, плоский граф, планарный граф.

**Теоремы.** Теорема о числе рёбер двудольного графа; лемма о рукопожатиях; наличие в дереве висячих вершин, соотношение между  $V$  и  $P$  в дереве, формула Эйлера; два неравенства для плоских графов.

**Основные задачи.** Уметь переводить задачу на язык графов; решать задачи на подсчёт числа рёбер и вершин; решать задачи, используя индукцию по числу вершин графа (убирая вершины с рёбрами или просто рёбра); решать задачи на применение формулы Эйлера и неравенств.